

UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

**Modelaje estocástico de medios poroelásticos
heterogéneos**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciada en Matemática

AUTOR

Rosa Luz Medina Aguilar

ASESOR

Eugenio Cabanillas Lapa

Lima - Perú

2014

MODELAJE ESTOCÁSTICO DE MEDIOS POROELÁSTICOS HETEROGÉNEOS

Rosa Luz Medina Aguilar

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciada en Matemática.

Aprobada por:

Mg. Claudio Balcázar Huapaya
(Presidente)

Dra. Nancy Moya Lázaro
(Miembro)

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
(Miembro Asesor)

LIMA - PERÚ

JUNIO DE 2014

Ficha Catalográfica

Medina Aguilar, Rosa Luz

Modelaje estocástico de medios poroelásticos heterogéneos (Lima) 2014.

XVIII, 64p. 29 cm

Tesis (Licenciatura) – UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS, FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS 2014.

I. UNMSM/Facultad de Ciencias Matemáticas.

II. Modelaje Estocático de Medios Poroelásticos Heterogéneos (E.D.P.).

“La experiencia más hechizante de este mundo es la del misterio: esa emoción fundamental, la cuna de toda ciencia y de todo arte verdadero. Quien no la conoce, quien es ya incapaz de imaginar, no puede sentir sorpresa por nada y es, a mi juicio, igual que un muerto o una vela apagada”
(Albert Einstein)

A Iara Gabriela, mi amada hija.

Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por acompañarme siempre.

A mi orientador Dr Eugenio Cabanillas Lapa por la confianza y apoyo; tambien agradezco a los miembros de la banca examinadora Dra Nancy Moya Lázaro y Mg. Claudio Balcázar Huapaya por sus indicaciones para mejorar la tesis.

A mi familia por el apoyo brindado durante todo este periodo en particular a mi hermana Patty.

A la UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS por acogirme para llevar mis estudios de pregrado.

A los profesores de la Facultad de Matemáticas por que fueron parte de mi formacion académica.

Finalmente a todos mis amigos de la universidad, en especial a Willy y Rocio.

Resumen de la Tesis presentada a la UNMSM, Facultad de Ciencias Matemáticas como parte de los requisitos para obtener el título profesional de Licenciada en Matemática

MODELAJE ESTOCÁSTICO DE MEDIOS POROELÁSTICOS HETEROGÉNEOS

Rosa Luz Medina Aguilar

Junio , 2014

Orientador: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

1. Medios porosos heterogéneos 2. Modelaje estocástica 3. Método de Montecarlo

Estudiamos la proximidad de dos modelos poroelásticos lineales aplicados a medios porosos altamente heterogéneos sujetos a las incertezas en la conductividad hidráulica y en las constantes elásticas. Los modelos poroelásticos completamente y débilmente acoplados estudiados surgen caracterizados por el grado de la intensidad de acoplamiento entre la hidrodinámica que gobierna el recorrido del fluido y la poromecánica que rige las deformaciones de la matriz porosa. Simulaciones computacionales del proceso de extracción primaria de petróleo son realizadas utilizando técnicas de Monte Carlo en conjunción con el método de elementos finitos. Resultados numéricos obtenidos muestran pérdida de una buena aproximación del modelo débilmente acoplado cuando hay presencia de variabilidad en las constantes elásticas.

Abstract of Thesis presented to UNMSM.

MODELLING STOCHASTIC OF HETEROGENEOUS POROELASTIC MEDIA

Rosa Luz Medina Aguilar

June, 2014

Advisor: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa

1. Heterogeneous porous media 2. Modelling stochastic 3. Montecarlo method

We study the accuracy of two linear poroelastic models applied to highly heterogeneous porous media subject to uncertainties in the permeability and the elastic constants. The poroelastic models completely and weakly coupled analyzed arise characterized by the degree of intensity coupling between the hydrodynamics, governor of the percolation of the fluid and poromechanics which governs the deformation of the porous matrix. Computational simulations of the primary extraction of oil process are carried out using Monte Carlo techniques in conjunction with finite element methods. Results obtained clearly confirm the conjecture established by the perturbation theory related with the inaccuracy of the weakly coupled model in the presence of variability in the elastic constants.

S      

1	Introducción	1
2	Nociones básicas de campos aleatorios	8
3	Modelaje de la poroelasticidad en la escala de laboratorio	17
3.1	Ecuaciones de la poroelasticidad lineal	17
3.1.1	Equilibrio de la mezcla sólido-fluido	18
3.1.2	Ecuación constitutiva para las tensiones efectivas	19
3.1.3	Ecuación de la masa global	19
3.1.4	Ley de Darcy	20
3.1.5	Formulación del modelo totalmente acoplado	20
3.2	Modelo débilmente acoplado	21
3.2.1	Formulación del modelo débilmente acoplado	24
4	Modelaje estocástico de medios poroelásticos heterogéneos	26
4.1	Representación estocástica de los coeficientes	27
4.2	Formulación estocástica	29
4.3	Método de Monte Carlo	31
4.3.1	Generación de los campos aleatorios	33
5	Discretización del modelo poroelástico	35
5.1	Notación adoptada para el método de Monte Carlo	35
5.2	Formulación variacional	37

5.3	Aproximación por elementos finitos	38
5.3.1	Formulación semidiscreta	39
5.3.2	Formulación completamente discreta	40
6	Simulaciones Numéricas	42
6.1	Generación de los campos aleatorios	44
6.2	Efecto de la variabilidad de K y E	45
6.3	Estudio numérico de la convergencia estadística	48
6.4	Comparación entre los dos modelos de poroelasticidad	49
7	Conclusiones	59
	Referencias Bibliográficas	61

Lista de Figuras

Figure

1.1	Espectro de escalas espaciales en un reservorio de petróleo	5
6.1	Ejemplo utilizado para validar la teoría bidimensional	43
6.2	Una realización del campo Gaussiano $Y = \ln K$ con $m_Y = -3.028$, exponencial $\sigma_Y = 1$ y $\lambda_Y = 10$	45
6.3	Campos de la presión (normalizada por la carga vertical) y de la segunda componente de la velocidad para $t=2$ días	46
6.4	Campos de la presión (normalizada por la carga vertical) y de la segunda componente de la velocidad para $t=36$ días	47
6.5	Campos del desplazamiento vertical y de la tensión normal para $t = 2$ días	47
6.6	Campos del desplazamiento vertical y de la tensión normal para $t = 36$ días	48
6.7	Convergencia estadística del primer momento de la presión	48
6.8	Convergencia estadística del segundo momento de la presión.	49
6.9	Comparación de los perfiles de la media de la presión (normalizada) obtenidos por los dos modelos para tres tiempos	50
6.10	Comparación entre los perfiles de la media de la presión (normal- izada) obtenidos por los dos modelos para dos tiempos	51
6.11	Comparación entre los perfiles de la velocidad de Darcy en la direc- ción "y" obtenidos por los dos modelos para tres tiempos	52

6.12	Comparación entre los perfiles de la velocidad de Darcy en la dirección vertical obtenidos por los dos modelos para dos tiempos	53
6.13	Comparación entre los perfiles de la media del desplazamiento vertical del sólido obtenidos por ambos modelos para tres tiempos . .	54
6.14	Comparación entre los perfiles de las medias del desplazamiento vertical del sólido entre los dos modelos para dos tiempos	55
6.15	Comparación entre los perfiles de la media de la tensión efectiva vertical obtenidos por ambos modelos para tres tiempos, a) medio homogéneo b) medio heterogéneo	56
6.16	Comparación entre los perfiles de la media de la tensión efectiva vertical del sólido obtenidos por los dos modelos para dos tiempos .	57
6.17	Comparación entre las curvas medias de producción obtenidas por los modelos débilmente y totalmente acoplados	58

Lista de Símbolos

\mathbf{x}, \mathbf{y}	vectores espaciales
Ω	dominio en \mathbb{R}^d , $d = 1, 2$ ou 3 (dimensión espacial)
Γ	frontera del dominio Ω
\mathbf{n}	vector unitario normal externo a Γ
X, Y	campos aleatorios
$C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	función de covariancia del campo X
$C_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	función de covariancia cruzada entre los campos X e Y
$\sigma_X^2(\mathbf{x})$	varianza del campo X
$\sigma_X(\mathbf{x})$	desviación estandar del campo X
$m_X(\mathbf{x})$	media del campo aleatorio X
m_G	media geométrica del campo aleatorio X
m_H	media harmónica del campo aleatorio X
λ_X	longitud de correlación
K	conductividad hidráulica
S	compresibilidad
E	módulo de Young
λ, μ	constantes de elasticidad
ν	coeficiente de Poisson
\mathbf{u}	desplazamiento del sólido
p	presión del poro
\mathbf{q}	velocidad de Darcy
σ	tensión efectiva
σ_T	tensión total
\mathcal{E}	matriz de deformaciones

Capítulo 1

Introducción

Entendemos como medio poroso a un cuerpo compuesto por una fase sólida y espacios vacíos denominados poros. La fase sólida denominada matriz porosa o esqueleto poroso esta formado por partículas y los poros están usualmente ocupados por uno o más fluidos. Esta clase de sistemas se encuentran en abundancia, de forma natural o contruidos artificialmente. Ejemplos de esta clase de sistemas son, formaciones geológicas como suelos y rocas, materiales artificiales como filtros y cerámicas y formaciones biológicas como cartílagos y huesos. Los medios porosos son objeto de estudio en diferentes áreas del conocimiento impulsando un crecimiento interdisciplinario ya sea teórico, experimental y computacional.

Fenómenos caracterizados por el acoplamiento hidromecánico en medios porosos envuelven dos procesos termodinámicos básicos: el movimiento del fluido através de los poros y la deformación de la matriz porosa, los cuales interactúan mutuamente. Variaciones en la presión del poro producen alteraciones en el estado de tensiones efectivas del esqueleto poroso, provocando la deformación de la matriz porosa y este a su vez induce perturbaciones en el recorrido del fluido debido a variaciones en las propiedades de la roca tales como permeabilidad y porosidad.

El modelaje computacional de este tipo de acoplamiento posee varias aplicaciones en diversas áreas del conocimiento, tales como en la ingeniería de petróleo, medio ambiente, geología, hidrología, mecánica de los suelos y biomecánica [Bear (1979), Wang (2000), Fung (1990)]. En particular, en el área de ingeniería de

petróleo entender el acoplamiento entre la hidrodinámica y la geomecánica es de suma importancia para el análisis de fenómenos de subsidencia (hundimiento de una superficie) y compactación de reservorios durante explotación de petróleo. Debido al peso de las formaciones en la parte superior de la camada geológica productiva, esta se encuentra bajo intensas solicitaciones mecánicas que son equilibradas por tensiones en el sólido y por la presión del fluido intersticial (presión del poro). El proceso evolutivo de producción, es caracterizado por la disipación de la presión del fluido intersticial que a su vez transfiere solicitaciones para la matriz porosa sufriendo esta un proceso de compactación [Lewis et al. (1991)].

Historicamente, el primer modelo de acoplamiento hidromecánico surgió de la teoría de consolidación unidimensional propuesta por Terzaghi (1925) donde introdujo el importante concepto de las tensiones efectivas a través de la diferencia entre el esfuerzo total aplicado sobre el medio poroso y la presión del poro. Generalizaciones de la teoría de Terzaghi para tres dimensiones basadas en la ecuación de difusión para la presión de poro fueron propuestas por Rendulic en 1936 y Terzaghi y Frölich en 1943, donde se introduce el concepto de compresibilidad de la matriz porosa (disminución de su volumen al someterlos a una presión o compresión), [Terzaghi y R. (1962), Shiffman et al. (1969)]. Tales modelos no consideran los efectos de las tensiones de cizallamiento sobre los cambios de la porosidad de la matriz (dilatancia, variación del volumen cuando se aplican tensiones tangenciales) ya que incorporan solamente deformaciones volumétricas del esqueleto poroso debido a las variaciones de la presión de poro [Shiffman et al. (1969), Lewis y Schrefler (1987)].

El concepto de medio poroelástico generalizado surge posteriormente cuando se incorpora la influencia de la componente desviadora de las tensiones efectivas sobre la hidrodinámica [Biot (1941)]. Basándose en el principio de las tensiones efectivas y en la ley de Hooke de la teoría de elasticidad, Biot(1941) propuso un modelo tridimensional general para describir el acoplamiento hidromecánico en formaciones geológicas. Consecuentemente, efectos de anisotropía y viscoelasticidad

de la matriz fueron incorporados a la teoría poromecánica [Biot y Willis (1957)]. Posteriormente, algunos autores [Shiffman et al. (1969), Lewis y Schrefler (1987), Gutierrez y Lewis (2002)] mostraron que la teoría simplificada basada en el concepto de compresibilidad puede ser reproducida como caso particular de la teoría general de la poroelasticidad al despreciar los efectos de la componente desviadora de la tensión efectiva sobre las deformaciones volumétricas de la formación geológica.

La teoría de poroelasticidad es el pilar que sustenta el modelaje del acoplamiento hidrogeomecánico en reservorios de petróleo. Actualmente el modelo de Biot, concebido en la época para describir procesos de consolidación de suelos, es usada ampliamente en diversas aplicaciones relacionadas con la geomecánica de reservorios de petróleo [Lewis et al. (1991), Longuemare et al. (2002)]. Teorías poromecánicas más realistas basadas en modelos constitutivos no lineales (poroplasticidad, poroviscoplasticidad) vienen siendo utilizadas en geomecánica de rocas [Chen y Han (1988)].

Apesar de los avances significativos obtenidos en el área de geomecánica de reservorios de petróleo aún persiste el paradigma de cuando es necesario utilizar modelos geomecánicos más complejos. Aún con la creciente disponibilidad de recursos computacionales *softwares* más robustos y de metodologías de discretización más precisas y computacionalmente eficientes en la resolución de problemas prácticos, la utilización del modelo poromecánico totalmente acoplado aún encuentra resistencia. Tal hecho se debe a que a mayor complejidad e intensidad en el acoplamiento se produce un aumento del esfuerzo computacional en la simulación de problemas en gran escala en comparación con los modelos simplificados [Settari y Mourits (1998)].

Al usar el modelo totalmente acoplado se resuelve las ecuaciones de conservación de masa y momento lineal simultáneamente en las variables desplazamiento de la roca y presión del fluido. A pesar que esta formulación es capaz de incorporar el acoplamiento, resolver simultáneamente el sistema lineal a través de una

discretización se torna un modelo computacionalmente caro si es utilizado en gran escala. [Dean et al. (2006)]. La forma más simple de tratar el problema explora el concepto de compresibilidad, el modelo débilmente acoplado esta caracterizado por el acoplamiento unidireccional entre las ecuaciones (*“one-way coupling”*). Es decir, la poromecánica influye a la hidrodinámica solamente a través de la compresibilidad de la roca el cual desacopla el sistema en una ecuación de difusión y otra de elasticidad. La ecuación de la poromecánica es resuelta mediante una esquema de post procesamiento donde, el gradiente de la poro presión que fue previamente calculado en la discretización de la ecuación de difusión, entra como término de fuerza en el problema de elasticidad de la matriz porosa. Esto significa que cambios en la poro presión alteran el estado de tensiones efectivas y lo inverso no sucede.

En el modelaje clásico de los problemas de poroelasticidad, las ecuaciones que gobiernan el acoplamiento hidromecánico son dados en la escala de laboratorio (*metros*) y los coeficientes poromecánicos que surgen en las ecuaciones son calculados experimentalmente en esta escala. Mientras que, en casi todos los casos prácticos de extracción de fluidos de reservorios, los problemas geomecánicos son puestos en la escala de campo (*Kilómetros*).

Una manera simplificada de prever el comportamiento geomecánico del reservorio en la escala de campo es admitir que el medio poroso es homogéneo adoptando valores experimentales de los parámetros obtenidos en la escala de laboratorio. A pesar de que la hipótesis de homogeneidad en la escala macroscópica sea ampliamente adoptada, observaciones de campo muestran que raras veces tal homogeneidad existe [Freeze (1975), Gelhar (1993), Dagan (1989)].

Medios porosos naturales exhiben heterogeneidad en un amplio espectro de escalas espaciales, ver Figura 1.1. Consecuentemente, adoptar un modelo puramente determinístico que encubra los efectos de la variabilidad de las propiedades no es realista. Una alternativa, sería describir el medio poroso detalladamente, lo que implica estimar un número extraordinariamente grande de medidas, procedimiento no viable en la práctica. La forma errática de las variaciones de estas

propiedades asociada a la distribución irregular de estos, inviabiliza también el uso de interpolación continua entre los puntos de medición [Gelhar (1993)].

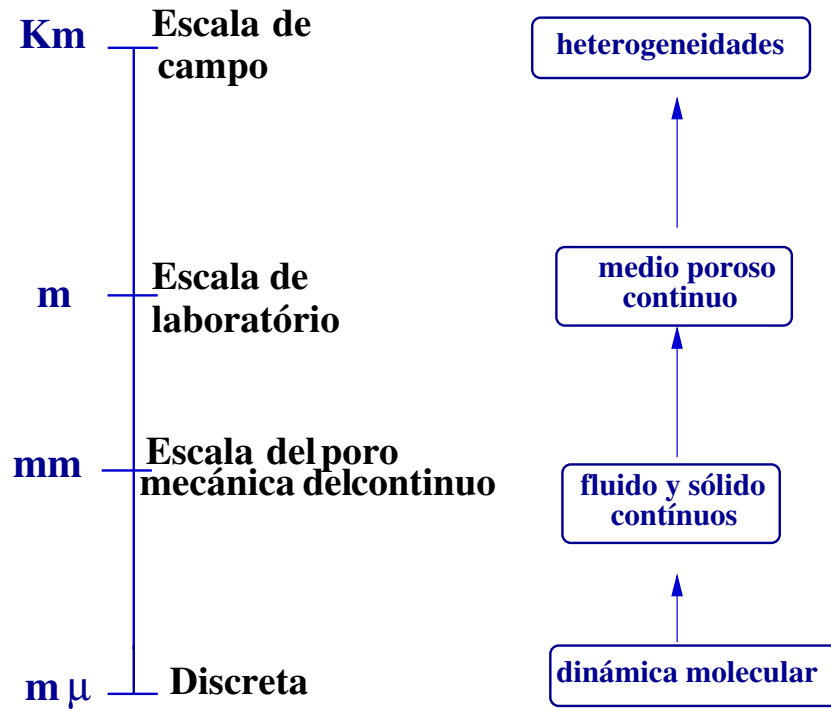


Figure 1.1: Espectro de escalas espaciales en un reservorio de petróleo

Para obtener una descripción más realista del acoplamiento hidrogeomecánico en la escala de campo es necesario incorporar la variabilidad espacial de las propiedades del material y también la incertidumbre debido a la escasez del conocimiento detallado de la geología (número limitado de muestras). En este contexto, la teoría de campos aleatorios nos da una herramienta adecuada para describir los parámetros del modelo [Dagan (1989), Gelhar (1993), Christakos (2005)]. La representación matemática de los coeficientes de la geología se da usando funciones aleatorias de la posición, los cuales expresan la variabilidad y la incerteza asociadas a estas propiedades [Rubin (2003)].

Al considerar los parámetros de entrada del modelo como campos aleatorios, las ecuaciones poroelásticas se convierten en ecuaciones diferenciales estocásticas con soluciones dadas por campos aleatorios parametrizados por la posición y el tiempo. El tratamiento estocástico dado a los coeficientes nos lleva al problema caracterizado por: conocidas las distribuciones de probabilidad de los parámetros

de entrada encontrar los momentos estadísticos de las incógnitas del problema resolviendo numericamente las ecuaciones diferenciales parciales estocásticas. En la práctica las informaciones provenientes de los dos primeros momentos estadísticos de las soluciones (media, covarianza), ya son suficientes para las aplicaciones en la ingeniería de reservorios [Gelhar (1993), Zhang (2002), Christakos (2005)].

Diversas técnicas de discretización de EDP's estocásticas han sido propuestas en la literatura [Freeze (1975), Dagan (1989), Gelhar (1993), Zhang (2002)]. La más tradicional, conocida como método de Monte Carlo, consiste en la generación de un conjunto de muestras (realizaciones) de los coeficientes del modelo, de acuerdo con las estructuras estadísticas postuladas, y la subsecuente solución determinística del modelo para cada realización obteniendo un conjunto de diferentes soluciones con la misma probabilidad estadística. La ventaja de este método es su simplicidad, robustez y facilidad para lidiar con cualquier grado de heterogeneidad. Este método puede ser aplicado a problemas lineales y no lineales, sin restricciones en cuanto a la magnitud de la fluctuación de los coeficientes (medios altamente heterogéneos) [Zhang (2002)].

Otro procedimiento adoptado en la literatura consiste en el uso de técnicas perturbativas para obtener ecuaciones efectivas determinísticas para los momentos estadísticos. Ejemplos de esta técnica son los métodos de Expansión Asintótica y Truncamiento Euleriano [Dagan (1989), Gelhar (1993), Zhang (2002)]. Esta clase de métodos adopta la hipótesis de pequeñas perturbaciones implicando en la linealización del modelo através de un problema de clausura (*"closure problem"*). Esta clase de métodos da buenas aproximaciones cuando la variabilidad de los parámetros es pequeña. Además de esta restricción, en general, solamente los dos primeros momentos estadísticos de las soluciones pueden ser calculados y el cálculo de estos momentos se vuelve computacionalmente cara cuando el número de variables envueltas en el sistema crece.

Por otro lado, métodos con notoriedad reciente han sido propuestos, basados en la discretización del espacio estadístico. Campos aleatorios pueden ser represen-

tados usando la expansión de Karhunen-Loève (cuando su función de covariancia es conocida) [Beran (1969)], expansiones de Polinomios de Caos (“*Chaos Polynomial*”) [Ghanem y Spanos (1991)] o generalizaciones de estos polinomios [Xiu e Karniadakis (2002)].

A pesar que el modelaje estocástico este bien desenvuelta para el flujo y transporte en medios porosos rígidos [Dagan (2002)], Poco se ha hecho para el caso de medios porosos deformables heterogéneos [Frias et al. (2004)]. De esta forma, el objetivo de este trabajo es ir en esa dirección, estudiar el comportamiento de las soluciones de los modelos poroelásticos débilmente y totalmente acoplados cuando se considera incertezas en los parámetros de entrada conductividad hidráulica y módulo de Young. Ilustramos numéricamente esas diferencias en ejemplos numéricos del problema de compactación de una formación geológica heterogénea durante el proceso de extracción primaria de un fluido.

Presentamos, inicialmente en el Capítulo 2 una revisión de la teoría de campos aleatorios. En el Capítulo 3 presentamos la teoría de poroelasticidad de Biot en la escala de laboratorio así como la versión simplificada de esta teoría, donde los efectos de la componente desviadora de la tensión efectiva sobre la hidrodinámica son despreciados, resultando en un problema al que llamaremos débilmente acoplado. En el Capítulo 4 presentamos los modelos estocásticos de los problemas dados en el capítulo anterior resultantes del tratamiento estadístico dado a los coeficientes, así como algunos métodos de resolución utilizados para calcular los momentos estadísticos de las soluciones. En el Capítulo 5 presentamos la discretización de las ecuaciones de las realizaciones en el contexto de Monte Carlo. El Capítulo 6 es dedicado a las simulaciones numéricas. Finalmente en el Capítulo 7 son presentadas las conclusiones.

Capítulo 2

Nociones básicas de campos aleatorios

En este capítulo presentamos los principales conceptos que fundamentan la teoría de campos aleatorios que utilizaremos en todo este trabajo. De una forma general, para cada posición espacial \mathbf{x} e instante de tiempo t , un campo aleatorio atribuye una variable aleatoria gobernada por una función de distribución. En este contexto identificamos comunmente los conceptos de campos aleatorios y procesos estocásticos, donde este último es tradicionalmente utilizado para describir funciones dependientes del tiempo, gobernadas por ecuaciones diferenciales ordinarias estocásticas [Parzen (1962), Papoulis (1965)]. En el presente contexto, los procesos estocásticos usados presentan también dependencia espacial, siendo entonces gobernados por ecuaciones diferenciales parciales estocásticas [Dagan (1989), Gelhar (1993), Zhang (2002), Christakos (2005)].

Para caracterizar apropiadamente la estructura estadística que sustenta la teoría de campos aleatorios, introducimos a continuación algunos conceptos fundamentales:

El espacio de probabilidad es caracterizado por el triplete $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$, donde $\mathcal{S} \neq \emptyset$, es el espacio muestral formado por todos los resultados posibles ω de un experimento, \mathcal{F} una σ -álgebra de subconjuntos de \mathcal{S} , donde cada elemento de \mathcal{F} es denominado evento aleatorio de \mathcal{S} y P una medida de probabilidad definida sobre el espacio medible $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$.

Una variable aleatoria real $X := X(\omega)$, discreta o continua, es una función $X : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada elemento $\omega \in \mathcal{S}$ un único valor $X(\omega)$. La manera usual de medir estadísticamente los valores de la variable X , consiste en definir su función de distribución acumulada F de la siguiente forma:

$$F(x) := P[\omega \in \mathcal{S} : X(\omega) \leq x] = P(X \leq x),$$

la cual, denota la probabilidad de que los valores de la variable aleatoria X sean menores que algun valor x fijado. Podemos notar que $F(x)$ es una función no decreciente de x con rango en el intervalo $[0, 1]$. Si $F(x)$ admite diferenciabilidad entonces necesariamente X es una variable aleatoria continua y podemos definir su función de densidad de probabilidad como:

$$f(x) := \frac{dF(x)}{dx}.$$

Por el teorema fundamental del cálculo dado $f(x)$ podemos definir $F(x)$ de la forma:

$$F(x) := P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy.$$

En muchas aplicaciones, los modelos matemáticos que representan fenómenos físicos admiten como datos de entrada a un conjunto de parámetros que son susceptibles a la incerteza. Por tanto, utilizando el modelaje estocástico, para cada par (\mathbf{x}, t) los parámetros físicos son tratados como variables aleatorias continuas, asignando a estas una función de densidad de probabilidad.

La esperanza matemática o valor medio de una variable aleatoria X es definida por

$$E[X] := \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (2.1)$$

y la varianza de X es definida por

$$\text{Var}(\mathbf{x}) := \sigma_X^2 := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X]. \quad (2.2)$$

La desviación estandar de X es definido como $\sigma_X := \sqrt{\sigma_X^2}$. El valor medio de X , denominado también como primer momento, tiene como objetivo capturar el “centro” de la distribución de los posibles valores de X y la varianza mide la dispersión de estos valores en torno de esta media. Si $m_X := E[X] \neq 0$, el grado de incerteza de X es medido por el coeficiente de variación

$$CV := \frac{\sigma_X}{m_X}. \quad (2.3)$$

Un modelo bastante utilizado en la caracterización de una variable aleatoria es la distribución normal. Una variable aleatoria Y es Gaussiana o con distribución normal, si su función de densidad de probabilidad es dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp \left[-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right], \quad -\infty \leq y \leq \infty, \quad (2.4)$$

donde los parámetros m_Y y σ_Y^2 designan el valor medio y la varianza de Y . En este caso particular, la variable aleatoria normal denotada por $Y := N(m_Y, \sigma_Y^2)$ es completamente caracterizada por su media y varianza.

Un concepto de gran importancia en las aplicaciones de este trabajo es el de variable aleatoria log-normal [Freeze (1975), Dagan (1989), Gelhar (1993)]. Considerando la función no lineal de la forma $X = \exp Y$, cuya inversa es $Y = \ln X$, si $Y = N(m_Y, \sigma_Y^2)$, X es llamada de variable aleatoria log-normal y su función de densidad de probabilidad es dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y x} \exp \left[-\frac{(\ln x - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2} \right], \quad x \geq 0. \quad (2.5)$$

Las medias y las varianzas, de las variables aleatorias Y y $X = \exp Y$ satisfacen las siguientes relaciones [Gelhar (1993)]:

$$m_X = \exp \left(m_Y + \frac{\sigma_Y^2}{2} \right), \quad (2.6)$$

$$\sigma_X^2 = \exp \left(2m_Y + \sigma_Y^2 \right) \left[\exp \left(\sigma_Y^2 \right) - 1 \right], \quad (2.7)$$

la fluctuación de X con respecto a la media, es dada por

$$\hat{X} = X - m_X = \exp(m_Y) \left[\exp(\hat{Y}) - \exp\left(\frac{\sigma_Y^2}{2}\right) \right], \quad (2.8)$$

y el coeficiente de variación de X es dado por la siguiente relación

$$(CV_X)^2 = \frac{\sigma_X^2}{m_X^2} = \exp(\sigma_Y^2) - 1. \quad (2.9)$$

Finalmente definimos la media geométrica y armónica de X en función de Y como [Dagan (1989)]:

$$m_G = \exp(m_Y), \quad (2.10)$$

$$m_H = \exp\left[m_Y - \frac{1}{2}\sigma_Y^2\right]. \quad (2.11)$$

Las definiciones anteriores son asociadas a la estadística de un punto. Cuando dos o más variables aleatorias son definidas simultaneamente en un espacio de probabilidad, se hace necesario caracterizarlo conjuntamente. Para extender las definiciones anteriores en este contexto, definimos la distribución acumulativa conjunta de dos variables aleatorias X e Y como:

$$F_{XY}(x, y) := F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

De la misma forma que $F(x)$, F_{XY} es monótona creciente en cada una de las variables, admitiendo valores entre 0 y 1. La diferenciación de $F(x, y)$ con respecto a x e y nos da la función de distribución de probabilidad conjunta

$$f_{XY}(x, y) := f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}. \quad (2.12)$$

Las funciones de densidad de probabilidad marginales son definidas por:

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy; \quad f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Dos variables aleatorias continuas X e Y con densidades f_X y f_Y son llamadas independientes si

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Denotando $m_X = E[X]$ y $m_Y = E[Y]$ las medias de X e Y repectivamente, la covarianza entre las variables aleatorias X e Y es definida por:

$$\text{Cov}(X, Y) := E[\hat{X}, \hat{Y}] = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E[XY] - m_X m_Y. \quad (2.13)$$

La función de covarianza desempeña un papel fundamental en este trabajo, debido a que es una medida de asociación lineal entre variables aleatorias, indicando el grado de correlación entre ellas [Christakos (2005)]. Valores positivos de la covarianza indican que Y tiende a crecer (decrecer) cuando X crece (decrece) y valores negativos indican que Y tiende a decrecer (crecer) cuando X crece (decrece).

Definimos también la correlación entre dos variables aleatorias X e Y por la razón

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

donde $|\rho_{XY}| \leq 1$ y $\text{Cov}(X, Y) \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$ [Papoulis (1965)]. Si X e Y son variables aleatorias independientes entonces $\rho_{XY} = 0$ y, consecuentemente, no existe correlación entre ellas.

Las variables aleatorias representan un mapeamiento entre un conjunto de muestras y un número real. Cuando una o más variables aleatorias estan asociadas a parámetros determinísticos (como una posición en un dominio espacial), son llamados campos aleatorios. En las aplicaciones en el área de medios porosos, parámetros físicos tales como la conductividad hidráulica, porosidad, módulo de Young y constantes elásticas admiten variaciones irregulares con incertezas descritas a través de campos aleatorios con funciones de covarianza dadas o prescritas.

A continuación presentamos la generalización de las definiciones anteriores para campos aleatorios:

Sea $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3, \dots$, un dominio espacial. Un campo aleatorio escalar $X(\mathbf{x}, \omega)$ es definido por la función

$$\begin{aligned} X : \Omega \times \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \omega) &\rightarrow X(\mathbf{x}, \omega), \end{aligned} \quad (2.14)$$

la cual puede ser interpretada como una colección de variables aleatorias indexadas por $\mathbf{x} \in \Omega$. Fijando un evento $\omega \in \mathcal{S}$, la función $X(\mathbf{x})$ es denominada realización del campo aleatorio o proceso estocástico. Para cada $\mathbf{x} \in \Omega$, la dependencia $X(\omega)$ define una variable aleatoria del proceso estocástico.

La extensión de los conceptos anteriores para campos aleatorios vectoriales es hecha aplicando las definiciones dadas, a cada componente. Un campo aleatorio vectorial $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \omega)$ es un conjunto de campos aleatorios escalares $X_1(\mathbf{x}, \omega)$, $X_2(\mathbf{x}, \omega)$, \dots , $X_k(\mathbf{x}, \omega)$, denotado por

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \omega) = [X_1(\mathbf{x}, \omega), X_2(\mathbf{x}, \omega), \dots, X_k(\mathbf{x}, \omega)]^t. \quad (2.15)$$

En el contexto de campos aleatorios la extensión de las definiciones de los momentos estadísticos es inmediata, siendo apenas indexada por la posición. Definimos entonces, las funciones media y covarianza de la siguiente forma:

$$m_X(\mathbf{x}) = E[X(\mathbf{x})] \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \text{Cov}(X(\mathbf{x}), X(\mathbf{y})) = E[\hat{X}(\mathbf{x}) \cdot \hat{X}(\mathbf{y})] \\ &= E[X(\mathbf{x}) \cdot X(\mathbf{y})] - m_X(\mathbf{x})m_X(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde $\hat{X}(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x}) - m_X(\mathbf{x})$ es la fluctuación del campo $X(\mathbf{x})$. Cuando la función covarianza es conocida definimos la función varianza como

$$\sigma_X^2(\mathbf{x}) := C_X(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.18)$$

y la función de correlación espacial de la forma

$$\rho_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma_X(\mathbf{x}) \cdot \sigma_X(\mathbf{y})}. \quad (2.19)$$

Para analizar el grado de correlación entre dos o más campos aleatorios definimos un momento estadístico adicional denominado de función de covarianza cruzada. Denotando X e Y dos campos aleatorios con $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ dos puntos del dominio Ω , la función covarianza cruzada es definida como

$$C_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := E \left[(X(\mathbf{x}) - m_X(\mathbf{x})) (Y(\mathbf{y}) - m_Y(\mathbf{y})) \right]. \quad (2.20)$$

De forma análoga a (2.19), podemos definir la función de correlación cruzada espacial, de la forma

$$\rho_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{C_{XY}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\sigma_X(\mathbf{x}) \cdot \sigma_Y(\mathbf{y})}. \quad (2.21)$$

Los conceptos dados anteriormente pueden ser extendidos para campos aleatorios vectoriales. De esta forma, la matriz de las funciones de covarianzas cruzadas entre las componentes del vector aleatorio $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = [X_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x}), \dots, X_k(\mathbf{x})]^t$, es definida por

$$\mathbf{C}_\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[C_{X_p X_q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right], \quad p, q = 1, 2, \dots, k \quad (2.22)$$

Por ejemplo, para $k = 2$, tenemos

$$\mathbf{C}_\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} C_{X_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & C_{X_1 X_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ C_{X_2 X_1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & C_{X_2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{bmatrix}.$$

Para describir completamente la estructura probabilística de un campo aleatorio $X(\mathbf{x}, \omega)$ es necesario especificar las funciones de densidad de probabilidad conjunta para todas las variables aleatorias en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$, y esto consiste en una tarea realmente imposible de realizar. Para simplificar la estructura de datos se adopta, frecuentemente la hipótesis de homogeneidad estadística (llamada también

de estacionaridad), donde se postula que la distribución estadística de los coeficientes de entrada en el modelo son independientes de la posición. En la mayoría de las aplicaciones prácticas es adoptada la hipótesis de estacionaridad de segundo orden o estacionaridad débil [Gelhar (1993), Christakos (2005)]. Entonces, postulando que la media es constante y que la covarianza depende solamente del vector $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$, tenemos

$$m_X(\mathbf{x}) = m_X, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = C_X(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = C_X(\mathbf{r}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

Algunos procesos naturales pueden también ser aproximados por campos aleatorios isotrópicos, en este caso la función de covarianza depende solamente de la distancia $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ y no de la orientación del vector \mathbf{r} , implicando así en una equivalencia en todas las direcciones.

El comportamiento de la covarianza con la distancia r es determinado por la organización o grado de correlación entre las heterogeneidades, en este trabajo nos referimos a heterogeneidades geológicas. Entre las funciones de covarianza frecuentemente utilizadas para describir formaciones geológicas, tenemos por ejemplo la función de covarianza Gaussiana

$$C_X(r) = \sigma_X^2 \exp\left(\frac{-4r^2}{\pi\lambda_X}\right), \quad (2.23)$$

y la función de covarianza exponencial,

$$C_X(r) = \sigma_X^2 \exp\left(\frac{-r}{\lambda_X}\right). \quad (2.24)$$

La función exponencial es bastante usada en la hidrodinámica en medios porosos, donde λ_X denota la distancia de correlación, interpretada como la distancia sobre el cual las correlaciones prevalecen. Las relaciones definidas en (2.23) y (2.24) son para medios isotrópicos y pueden ser extendidas para medios anisotrópicos [Dagan

(1989), Christakos (2005)].

En el contexto de formaciones geológicas heterogéneas, diversos procesos naturales son aproximados muy bien por campos aleatorios con distribución log-normal [Christakos (2005)]. En este trabajo, los parámetros físicos de entrada del modelo poroelástico en particular la conductividad hidráulica y el módulo de Young, considerados constantes en los modelos determinísticos en la escala de laboratorio (Capítulo 3), son representados como campos aleatorios estacionarios con distribución log-normal en la escala de campo (Capítulo 4).

Capítulo 3

Modelaje de la poroelasticidad en la escala de laboratorio

En este capítulo presentamos una revisión de las ecuaciones que modelan el acoplamiento hidromecánico basado en la formulación de Biot (1941) (Modelo totalmente acoplado). Estas ecuaciones describen la interacción entre la deformación de la matriz porosa y el recorrido del fluido a través de los poros. La deformación de la matriz porosa es gobernada por las ecuaciones de elasticidad lineal mientras que el movimiento del fluido por la ley de Darcy con la velocidad de recorrido tomada relativa al movimiento de la fase sólida. En seguida presentamos una versión simplificada de esta teoría (Modelo desacoplado), en este modelo son despreciados los efectos de la componente desviadora de la tensión efectiva sobre la hidrodinámica, resultando en un problema débilmente acoplado, donde a geomecánica influye al recorrido del fluido solo a través de la compresibilidad de la roca.

3.1 Ecuaciones de la poroelasticidad lineal

Para presentar las ecuaciones que rigen el modelo poroelástico lineal consideramos una ventana observacional de la roca que compone el reservorio en la escala de laboratorio $\mathcal{O}(10^0 m)$. En esta escala de resolución, observamos al medio poroso homogéneo, deformable y saturado por un único fluido, donde en cada punto las fases sólida y fluida coexisten [Bear (1979), Coussy (2004)]. Como hipótesis simpli-

ficadoras suponemos: la ausencia de efectos gravitacionales e inerciales, incompresibilidad de la fase fluida y del sólido que compone el esqueleto poroso y la matriz porosa es asumida elástica lineal e isotrópica la cual sufre pequeñas deformaciones a partir de una configuración libre de tensiones. A continuación presentamos el conjunto de ecuaciones propuestas por Biot (1941).

3.1.1 Equilibrio de la mezcla sólido-fluido

Bajo la ausencia de efectos inerciales y gravitacionales la ecuación de balance del momento lineal de la mezcla sólido-fluido se reduce a la condición de equilibrio:

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma}_T = 0, \quad (3.1)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_T$ es la tensión total que actúa en la mezcla sólido-fluido. Para sólidos microscópicamente incompresibles, donde el volumen de los granos que componen la matriz porosa permanece inalterado durante la deformación, el principio de Terzaghi es representado matemáticamente por la decomposición

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}, \quad (3.2)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es la tensión efectiva, p la poro presión y \mathbf{I} el tensor identidad. La relación (3.2) puede ser interpretada como una descomposición de la tensión total en una parte responsable por la deformación de la matriz porosa ($\boldsymbol{\sigma}$), la cual gobierna la transmisión de los esfuerzos por contacto directo entre los granos, y otra ($p\mathbf{I}$) dada por la presión actuante en el fluido. Combinando el principio de las tensiones efectivas (3.2) con la ecuación del momento (3.1), obtenemos

$$\text{div} \boldsymbol{\sigma} - \nabla p = 0. \quad (3.3)$$

3.1.2 Ecuación constitutiva para las tensiones efectivas

Considerando la matriz porosa elástica lineal, isotrópica, tenemos la siguiente relación Hookeana

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}), \quad (3.4)$$

donde \mathbf{u} representa el desplazamiento del medio poroso, $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ el tensor de deformaciones, $\text{div} \mathbf{u} = \text{tr} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u})$ la deformación volumétrica de la matriz porosa y λ y μ las constantes elásticas de Lamé definidas como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.5)$$

donde E es el módulo de Young o de elasticidad longitudinal y ν el coeficiente de Poisson. Para establecer una relación lineal entre la deformación y el gradiente de los desplazamientos adoptamos la condición de compatibilidad geométrica cuando se tiene pequeñas deformaciones

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right). \quad (3.6)$$

3.1.3 Ecuación de la masa global

Siendo el fluido y el sólido microscópicamente incompresibles, las ecuaciones de continuidad o de masa de ambos son dadas respectivamente por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div}(\phi \mathbf{v}_f) = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial(1-\phi)}{\partial t} + \text{div} \left((1-\phi) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.8)$$

donde ϕ es la porosidad \mathbf{v}_f y $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$ las velocidades del fluido y del sólido respectivamente. Sumando (3.7) y (3.8), obtenemos

$$\operatorname{div} \left[\phi \left(\mathbf{v}_f - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right] + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

Definiendo $\mathbf{q} = \phi \left(\mathbf{v}_f - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)$ la velocidad Darciana del recorrido del fluido, la ecuación de masa total es dado por

$$\operatorname{div} \mathbf{q} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0. \quad (3.10)$$

3.1.4 Ley de Darcy

En la ausencia de efectos gravitacionales la ecuación del momento de la fase fluida es representada por la ley de Darcy

$$\mathbf{q} = -K \nabla p, \quad (3.11)$$

la cual establece una relación lineal entre la velocidad de recorrido del fluido a través de los poros y el gradiente de la presión donde K es la conductividad hidráulica del medio.

A seguir, formulamos el problema de poroelasticidad adoptando los campos potenciales de desplazamientos y presión como variables primarias [Biot (1941), Lewis y Schrefler (1987), Wang (2000)].

3.1.5 Formulación del modelo totalmente acoplado

Sea $(0, T]$ un intervalo de tiempo y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($1 \leq d \leq 3$) un dominio con frontera regular Γ y \mathbf{n} el vector unitario normal exterior, ocupado por un medio poroelástico, isotrópico, homogéneo, microscópicamente incompresible y saturado por un fluido Newtoniano. Usando las ecuaciones (3.3), (3.4), (3.6), (3.10) y (3.11)

el problema de poroelasticidad totalmente acoplado es dado por:

Problema 3.1 Dados los parámetros K , E y ν , determinar el desplazamiento del medio poroso $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y la presión en el poro $p : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaciendo

$$\left. \begin{aligned} \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{div}[\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla p) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \text{en } \Omega, \quad (3.12)$$

con condiciones de frontera

$$p = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \quad (3.14)$$

donde $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ con Γ_2 denotando un segmento de frontera rígido e impermeable y Γ_1 una subfrontera drenante con vector de tracción prescrito \mathbf{h} impuesto por el cargamento externo. Como el fluido y el sólido que constituyen la matriz son considerados incompresibles, en el instante inicial donde no ocurre el drenaje del fluido, el medio poroso responde de forma incompresible, entonces las condición inicial es

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{en } \Omega, \quad t = 0. \quad (3.15)$$

Despues de calcular los campos potenciales $\{\mathbf{u}, p\}$ la velocidad \mathbf{q} y la tensión efectiva $\boldsymbol{\sigma}$ son calculadas bajo los esquemas de post procesamiento considerando las leyes de Darcy (3.11) y Hooke (3.2), respectivamente.

3.2 Modelo débilmente acoplado

El modelo de poroelasticidad totalmente acoplado implica resolver simultaneamente las ecuaciones de equilibrio y masa. A pesar que este modelo es lineal, cuando se utiliza en la resolución de problemas de grande porte, que surgen por ejemplo en el modelaje del acoplamiento geomecánico en reservorios de petróleo,

se puede volver computacionalmente costoso y difícil de realizar en la práctica. Una forma de simplificar la formulación es debilitar el acoplamiento de tal forma que para cada paso del tiempo se calcula previamente la presión del poro y después el desplazamiento del medio poroso usando la ecuación de equilibrio (3.1), a través de un esquema de post procesamiento, en el cual el gradiente de la presión actúa como fuerza de cuerpo ya conocida. Tal versión simplificada de la teoría de poroelasticidad se ha utilizado ampliamente en los simuladores convencionales de reservorios [Fjaer et al. (1992), Lewis et al. (1991), Settari y Mourits (1998)]. A pesar de que este modelo no muestre algunos efectos importantes, tales como la dilatación de la roca inducida por cizalladura, la ventaja de adoptar la formulación desacoplada es su simplicidad matemática y computacional [Verruijt (2006)].

A continuación adoptamos el procedimiento descrito en Gutierrez y Lewis (2002), el cual muestra las simplificaciones necesarias para la obtención del modelo simplificado a partir de la teoría general de poroelasticidad. Este modelo débilmente acoplado se basa en la definición de la compresibilidad de la matriz porosa, despreciando los efectos de la componente desviadora de la tensión efectiva sobre el balance de masa. Tales hipótesis son ilustradas a continuación.

Tomando el trazo en la descomposición de Terzaghi (3.2) y usando la ley elástica lineal de la tensión efectiva (3.4), tenemos

$$\text{tr}\boldsymbol{\sigma}_T = (d\lambda + 2\mu)\text{tr}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) - dp.$$

donde $d = 1, 2, 3$ denota la dimensión del problema.

Denotando $K_0 = (d\lambda + 2\mu)/d$ el módulo de la deformación volumétrica de la fase sólida, derivando la ecuación de arriba en relación al tiempo y asumiendo regularidad suficiente (funciones C^2), para que las derivadas espacial y temporal conmuten, obtenemos

$$K_0 \frac{\partial \text{div} \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{1}{d} \frac{\partial \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3.16)$$

Definiendo la compresibilidad de la roca por $S := 1/K_0$ y usando la relación (3.5),

la compresibilidad S puede ser calculada como función del modulo de Young y del coeficiente de Poisson, en la siguiente relación

$$S = \frac{d}{d\lambda + 2\mu} = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{(d\nu - 2\nu + 1)E}. \quad (3.17)$$

Usando (3.16) en (3.10) y la ley de Darcy (3.11) el balance de masa puede ser reescrito como

$$S \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla p) = \frac{S}{d} \frac{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t}. \quad (3.18)$$

Podemos observar claramente que, bajo las hipótesis de invariabilidad en el tiempo del trazo de la tensión total actuante en el sistema ($\frac{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t} = 0$), la ecuación anterior es un modelo de difusión clásica desacoplada para la presión. Para ilustrar la validez de esta hipótesis, consideramos la decomposición $\boldsymbol{\sigma}_T$ como la suma de un tensor referente a la tensión hidrostática y una componente desviadora, referente al cizallamiento puro

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \frac{1}{d} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T \mathbf{I} + \mathbf{D},$$

donde \mathbf{D} es el desviador de la tensión efectiva ($\operatorname{tr} \mathbf{D} = 0$). Derivando la ecuación de equilibrio (3.1) en relación al tiempo y usando la decomposición anterior, tenemos

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{d} \frac{\partial \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}_T) \mathbf{I}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0.$$

Consideremos la formulación variacional del resultado anterior, es decir, multiplicando por una función de prueba \mathbf{v} en un espacio apropiado, integramos por partes y usamos a condición de frontera (3.13) para obtener

$$\left(\frac{1}{d} \frac{\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t}, \operatorname{div} \mathbf{v} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \right) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_T}{\partial t} \mathbf{v} \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \mathbf{v}, \, d\Gamma_1. \quad (3.19)$$

Podemos verificar en la ecuación anterior que, la ausencia de efectos transientes en la componente distorsional \mathbf{D} y del cargamento externo \mathbf{h} tenemos $\partial(\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T)/\partial t = 0$.

Usando esta hipótesis en (3.18) obtenemos la ecuación desacoplada para la presión

de la forma

$$S \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla p) = 0.$$

La exactitud del resultado esta fuertemente asociada a las condiciones de frontera externas, al cargamento impuesto en las rocas vecinas al reservorio productivo. En las situaciones donde el cargamento esta uniformemente distribuido en una subfrontera, llevando a un problema unidimensional (ex. problema de Terzaghi) o uniforme sobre todo el frontera del reservorio, el efecto de la componente desviadora es despreciable [Lewis et al. (1991), Gutierrez y Lewis (2002), Mainguy y Longuemare (2002)]. Por otro lado, en las otras situaciones la parte $\partial \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}_T / \partial t$ puede no ser despreciable y su efecto debe ser analizado caso a caso, siendo fuertemente influenciado por la naturaleza de las condiciones de frontera que describen el cargamento externo impuesto sobre el reservorio.

3.2.1 Formulación del modelo débilmente acoplado

Bajo las hipótesis mencionadas anteriormente podemos enunciar el problema hidrogeomecánico débilmente acoplado como sigue:

Problema 3.2 Sea $(0, T]$ un intervalo de tiempo y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$ con frontera Γ . Dados los parámetros K y S , encontrar la presión $p : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$S \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla p) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (3.20)$$

con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} p &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \end{aligned} \quad (3.21)$$

y condición inicial

$$p = \bar{p}, \quad \text{en } \Omega, \quad (3.22)$$

donde $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Una vez calculada la presión, pueden ser calculado el desplazamiento resolviendo el siguiente problema de elasticidad:

Problema 3.3 Dadas las constantes de Lamé λ y μ y la presión $p(\mathbf{x}, t)$ solución del Problema 3.2, hallar el campo de desplazamientos $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, satisfaciendo

$$\nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) + \operatorname{div}[\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] = \nabla p, \quad \text{en } \Omega. \quad (3.23)$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2.$$

Capítulo 4

Modelaje estocástico de medios poroelásticos heterogéneos

En el modelaje poroelástico presentado en el capítulo anterior las ecuaciones que gobiernan el acoplamiento hidromecánico son puestas en la escala de laboratorio (*metros*) y los coeficientes del modelo calculados experimentalmente en esta escala. No en tanto, en muchas aplicaciones que tiene que ver con simulaciones de reservorios de petróleo o acuíferos estos coeficientes son dados en la escala de campo (*kilómetros*). En este escenario geológico, formaciones naturales (suelos y rocas) son genuinamente heterogéneas en la escala de campo y sus propiedades físicas varían de forma irregular a lo largo de distancias mayores diferentes a aquellas de la escala de laboratorio, y se suma a esto la escasez de datos experimentales de las propiedades. Por lo tanto la teoría de campos aleatorios constituye una herramienta apropiada para caracterizar tales propiedades físicas que están sujetas a variabilidades e incertezas.

En este capítulo presentamos los modelos estocásticos poroelásticos resultantes del tratamiento estadístico dado a los coeficientes, así como el método de Monte Carlo utilizado en este trabajo para el cálculo de los momentos estadísticos de las soluciones.

4.1 Representación estocástica de los coeficientes

Para introducir la variabilidad e incerteza en los coeficientes hidromecánicos, en particular en la conductividad hidráulica $K(\mathbf{x})$ y en el módulo de Young $E(\mathbf{x})$, consideramos tales parámetros como campos aleatorios. Por otro lado, debido a la faja reducida de valores del coeficiente de Poisson $0 \leq \nu \leq 0.5$, los efectos de la variabilidad son despreciables cuando son comparados a los efectos de las variables K y E [Beacher y Ingra (1981), Zeitoun y Baker (1992)]. De esta forma, en el desenvolvimiento a seguir, el coeficiente de Poisson ν será tratado determinísticamente.

Datos de campo justifican la utilización de la distribución log-normal para la conductividad hidráulica [Freeze (1975), Dagan (1989), Gelhar (1993)] y el módulo de Young [Lumb (1966), Paice et al. (1996)]. Definimos entonces los campos Gaussianos

$$Y(\mathbf{x}) =: \ln K(\mathbf{x}), \quad T(\mathbf{x}) =: \ln E(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

siendo $K(\mathbf{x}) > 0$ y $E(\mathbf{x}) > 0$, adoptamos la hipótesis de estacionaridad de segundo orden e isotropía para $Y(\mathbf{x})$ y $T(\mathbf{x})$ [ver Capítulo 2], entonces las medias y las covarianzas son dadas por

$$\begin{aligned} m_Y &= \text{cte}, & C_Y(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_Y(r), \\ m_T &= \text{cte}, & C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= C_T(r), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde la distancia r es dada por $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$.

El modelo de covarianza utilizado en este trabajo para los campos Y y T es el de covarianza exponencial (2.24) descrito en el Capítulo 2. Además de eso, consideramos la hipótesis que los campos $Y(\mathbf{x})$ y $T(\mathbf{x})$ son independientes entre sí, esto es, $C_{YT}(x, y) = 0$.

Denotando $X = \{K, E\}$ y $Z = \{Y, T\}$, considerando X campo aleatorio Gaussiano con función de densidad de probabilidad univariada y usando (2.6)-(2.8) y (2.10)

tenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} m_X(\mathbf{x}) &= \exp \left(m_Z + \hat{Z}(\mathbf{x}) \right) = \exp(m_Z) \exp \left(\hat{Z}(\mathbf{x}) \right) \\ &= X_G \exp \left(\frac{\sigma_Z^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} C_X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= E \left[\exp(Z(\mathbf{x}) \exp(Z\mathbf{y})) \right] - m_X(\mathbf{x})m_X(\mathbf{y}) \\ &= X_G^2 \exp \left(\frac{\sigma_Z^2}{2} \right) \left[\exp(C_Z(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde X_G es la media geométrica del campo X .

Como estamos considerando el coeficiente de Poisson ν determinístico usando las relaciones de las constantes de Lamé (3.5) y de la compresibilidad (3.17), tenemos las siguientes relaciones entre los campos aleatorios: constantes de Lamé, compresibilidad y el módulo de Young

$$\lambda(\mathbf{x}) = c_1 E(\mathbf{x}), \quad c_1 = \frac{\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad (4.5)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = c_2 E(\mathbf{x}), \quad c_2 = \frac{1}{2(1 + \nu)}, \quad (4.6)$$

$$S(\mathbf{x}) = \frac{c_3}{E(\mathbf{x})}, \quad c_3 = \frac{1}{(dc_1 + 2c_2)}. \quad (4.7)$$

Definiendo el campo aleatorio R como: $R := \ln S$ y tomando el logaritmo en (4.7) tenemos las siguientes relaciones entre los momentos de los campos R y T asociados al módulo de Young y compresibilidad respectivamente

$$\begin{cases} m_R = \ln c_3 - m_T, \\ C_R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \\ \sigma_R^2 = \sigma_T^2, \end{cases} \quad (4.8)$$

y para cualquier campo escalar X se verifica la siguiente relación

$$C_{RX}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C_{TX}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (4.9)$$

Además de esto, tenemos también las relaciones entre las medias geométricas de λ , μ y S con E [$E_G = \exp(m_T)$]

$$\lambda_G = c_1 E_G, \quad \mu_G = c_2 E_G, \quad S_G = \frac{c_3}{E_G}. \quad (4.10)$$

Una vez establecida la estructura estadística de los parámetros de entrada, formulamos a continuación el modelo poroelástico estocástico.

4.2 Formulación estocástica

Sea $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, donde \mathcal{S} es el espacio muestral, \mathcal{F} la σ -álgebra y P la medida de probabilidad. Denotando $I = (0, T]$ un intervalo de tiempo y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$), con frontera Γ suave y vector unitario normal externo \mathbf{n} , un dominio macroscópico ocupado por un reservorio poroelástico heterogéneo. Tenemos entonces el siguiente problema:

Problema 4.1 Sean $\{\omega, \mathbf{x}, t\} \in \mathcal{S} \times \Omega \times I$ un evento básico, la posición espacial y el tiempo del proceso estocástico respectivamente. Dadas as estructuras estadísticas de las variables aleatorias con distribución log-normal $K(\mathbf{x}, \omega)$ y $E(\mathbf{x}, \omega)$, hallar los momentos estadísticos de los campos aleatorios de desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$, presión del poro $p(\mathbf{x}, t, \omega)$, tensión efectiva $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t, \omega)$, y velocidad de Darcy $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t, \omega)$ satisfaciendo

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} &= 0, \\ \mathbf{q} &= -K \nabla p, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}), \end{aligned} \right\} \quad \text{en } \Omega \times \mathcal{S}, t \in [0, T], \quad (4.11)$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} p &= 0, & \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{h}, & \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ \mathbf{u} &= 0, & \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

y condición inicial

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \text{en } \Omega \times \mathcal{S}, \quad t = 0, \quad (4.13)$$

donde la carga impuesta \mathbf{h} es considerada como una función determinística.

De forma análoga podemos enunciar la formulación estocástica del problema fracamente acoplado de la forma:

Problema 4.2 Sean $\{\omega, \mathbf{x}, t\} \in \mathcal{S} \times \Omega \times I$ un evento básico, la posición espacial y el tiempo de un proceso estocástico, respectivamente. Dadas las estructuras estadísticas con función de distribución log-normal de $K(\mathbf{x}, \omega)$ y $E(\mathbf{x}, \omega)$, encontrar los momentos estadísticos del campo de presión de poro $p(\mathbf{x}, t, \omega)$ satisfaciendo

$$S \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{q}) = 0, \quad \text{en } \Omega \times \mathcal{S}, \quad t \in [0, T], \quad (4.14)$$

sujeto a las condiciones de frontera e inicial

$$\begin{aligned} p &= p_0, \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ \nabla p \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$p = 0, \quad \text{en } \Omega \times \mathcal{S}, \quad t = 0, \quad (4.16)$$

donde p_0 es considerada una función determinística y S es dada por la relación (4.7).

Una vez computados los momentos de la presión, el esquema de post procesamiento de los momentos del campo de desplazamiento es dado por el siguiente problema:

Problema 4.3 Dados los momentos del campo aleatorio $p(\mathbf{x}, t, \omega)$, solución del Problema 4.2, la estructura estadística con función de distribución log-normal de $E(\mathbf{x}, \omega)$, hallar los momentos del campo de desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$, tal que

$$\operatorname{div}[\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \nabla(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) = \nabla p, \quad \text{en } \Omega \times \mathcal{S}, \quad (4.17)$$

sujeto a las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathcal{S}, \\ \mathbf{u} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \times \mathcal{S}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

siendo \mathbf{h} determinístico, λ y μ dados por las relaciones (4.5) y (4.6).

Al tratar los parámetros de entrada del modelo poroelástico como campos aleatorios, las ecuaciones poroelásticas se convierten en estocásticas con soluciones dadas por funciones aleatorias dependientes de (\mathbf{x}, t, ω) . El problema fundamental consiste en: dada una distribución de probabilidades para los coeficientes, encontrar procedimientos para computar las distribuciones de probabilidad de las variables poroelásticas (presión, desplazamientos). De forma general, tal nivel de información es muy sofisticada y costosa computacionalmente. En la práctica computar los dos primeros momentos estadísticos, los cuales nos dan informaciones sobre la media y la varianza, ya es suficiente para las aplicaciones que deseamos [Gelhar (1993), Zhang (2002), Christakos (2005)].

A continuación presentamos el método de Monte Carlo, método tradicional para calcular los momentos estadísticos de las soluciones del modelo.

4.3 Método de Monte Carlo

El método de Monte Carlo es una técnica tradicional de simulación numérica directa y ampliamente usada para calcular los momentos estadísticos de las variables dependientes. En muchos casos, las soluciones numéricas obtenidas por este método son tratadas como soluciones exactas para probar la precisión de otros métodos [Dagan (1989), Zhang (2002)].

El procedimiento de implementación del método es dividido en tres etapas: La primera consiste en la generación de un conjunto de M realizaciones de los coeficientes de entrada del modelo, en nuestro caso la conductividad hidráulica K y el módulo de Young E . En seguida las ecuaciones determinísticas del modelo son re-

sueitas numéricamente para cada realización k generando un conjunto de posibles soluciones del problema (presión, desplazamientos, tensión y velocidad). Finalmente, después de la obtención del conjunto de soluciones $g_k = \{p_k, \mathbf{q}_k, \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\sigma}_k\}$ del problema indexadas para cada realización $k = 1, 2, 3, \dots, M$, los dos primeros momentos estadísticos, média m_g^M , covarianza C_g^M y varianza $\sigma_{g,M}^2$ asociadas a las M realizaciones, son calculados numéricamente de la siguiente forma:

$$m_g^M(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M g_k(\mathbf{x}), \quad (4.19)$$

$$C_g^M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left(g_k(\mathbf{x})g_k(\mathbf{y}) - m_g^M(\mathbf{x})m_g^M(\mathbf{y}) \right), \quad (4.20)$$

$$\sigma_{g,M}^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \left([g_k(\mathbf{x})]^2 - [m_g^M(\mathbf{x})]^2 \right). \quad (4.21)$$

Bajo la hipótesis de convergencia estadística, cuando $M \rightarrow \infty$, los momentos computados numéricamente convergen para los momentos de la solución del problema continuo.

Para el cómputo de M adoptamos el criterio de la convergencia de Cauchy, evaluando el error relativo Er para dos realizaciones sucesivas. Por ejemplo, para la media tenemos

$$Er(m_g^M) = \frac{\|m_g^M - m_g^{M-1}\|}{\|m_g^M\|}, \quad (4.22)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma del máximo. Entonces para una tolerancia prescrita ϵ el criterio de convergencia es dado por:

$$|Er(m_g^{M+1}) - Er(m_g^M)| < \epsilon. \quad (4.23)$$

De forma análoga, definimos los criterios de convergencia para la varianza y la covarianza.

Una grande ventaja del método de Monte Carlo es su simplicidad y robustez [Dagan (2002)]. Los momentos de orden más alto de la solución también pueden ser calculados numericamente. Además de esto, al contrario de los métodos per-

turbativos la exactitud del método de Monte Carlo no está limitado a pequeñas fluctuaciones de los coeficientes, y puede ser aplicado a medios altamente heterogéneos. Su limitación reside en el elevado costo computacional, siendo necesario en algunos casos un gran número de realizaciones para obtener convergencia estadística [Dagan (1989), Zhang (2002)].

4.3.1 Generación de los campos aleatorios

La calidad de la generación de los campos aleatorios asociados a los parámetros físicos de entrada del modelo matemático poseen un papel decisivo en la precisión del método de Monte Carlo. El objetivo de las diversas técnicas de generación de los campos aleatorios propuestos en la literatura de medios porosos, es la construcción de mapas geológicos que reflejen de forma precisa la estructura estadística postulada para los coeficientes. Entre los métodos más utilizados podemos destacar: Método de bandas rotativas (*Turning bands*) [Mantoglou y Wilson (1982)], Método espectral [Christakos (2005)], Método de decomposición LU de la matriz de covarianzas [Harter (1994), Zhang (2002), Christakos (2005)].

En este trabajo adoptamos el método de decomposición de matrices LU, el cual, según Christakos (2005) es el que exhibe mejor calidad para campos aleatorios Gaussianos. La aplicación de esta técnica consiste básicamente en tres pasos: En el primer paso tenemos que, dado un modelo de covarianza $C_X(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ con $(i, j = 1, 2, \dots, m)$, calculamos la correspondiente matriz de covarianzas discreta de dimensión $m \times m$

$$\mathbf{C}_X^M = \begin{bmatrix} C_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \dots & C_X(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_m) \\ C_X(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & \dots & C_X(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_m) \\ \vdots & & \vdots \\ C_X(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_1) & \dots & C_X(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) \end{bmatrix},$$

siendo \mathbf{C}_X^M una matriz simétrica y positiva definida. El segundo paso consiste en la decomposición en matrices triangulares, superior L e inferior U (Decomposición

de Cholesky), de la forma

$$\mathbf{C}_X^M = \mathbf{L}\mathbf{U},$$

donde $\mathbf{U} = \mathbf{L}^T$. Finalmente, un campo correlacionado \mathbf{X} , de media cero y covarianza \mathbf{C}_X^M es obtenido tomando el producto de la matriz triangular superior con un vector \mathbf{V} de m variables aleatorias Gaussianas independientes de media cero y varianza unitaria.

$$\mathbf{X} = \mathbf{L}\mathbf{V},$$

donde $\mathbf{X}^T = [X(\mathbf{x}_1), \dots, X(\mathbf{x}_m)]$. De hecho la covarianza de \mathbf{X} es dada por $\langle \mathbf{X}\mathbf{X}^T \rangle = \mathbf{L}\mathbf{V}\mathbf{V}^T\mathbf{U} = \mathbf{L}\mathbf{I}\mathbf{U} = \mathbf{C}_X^M$. Como \mathbf{X} posee media nula, un campo aleatorio \mathbf{Y} ($\mathbf{Y}^T = [Y(\mathbf{x}_1), \dots, Y(\mathbf{x}_m)]$), con media $E[Y(\mathbf{x})] \neq 0$ puede ser generado usando la relación

$$\mathbf{Y} = \mathbf{L}\mathbf{V} + \mathbf{M},$$

donde $\mathbf{M}^T = E[Y(\mathbf{x}_1), \dots, Y(\mathbf{x}_m)]$.

La limitación de este método está en que requiere mucha memoria para almacenar la matriz de covarianzas [Zhang (2002)].

Capítulo 5

Discretización del modelo poroelástico

En este capítulo presentamos la formulación variacional y la aproximación por elementos finitos de las ecuaciones determinísticas de cada modelo poroelástico para cada realización en el contexto del método de Monte Carlo.

5.1 Notación adoptada para el método de Monte Carlo

Antes de presentar las formulaciones variacionales de las ecuaciones discutimos la notación utilizada para el método de Monte Carlo.

Considerando la subdivisión del dominio Ω en N_b bloques Ω_b ($b = 1, 2, \dots, N_b$), dadas las medias y covarianzas estadísticas del log, de la conductividad hidráulica K y del módulo de Young E , son generados M realizaciones con distribución de probabilidad $K_k(\Omega_b)$ y $E_k(\Omega_b)$ ($k = 1, 2, \dots, M$, $b = 1, 2, \dots, N_b$), donde el tamaño del bloque es escogido en la misma orden que la escala de heterogeneidad de tal forma que asumiremos K_k y E_k constantes en cada bloque Ω_b del dominio. Usando las relaciones (4.5)-(4.7) podemos generar para cada realización en cada bloque los demás parámetros: la compresibilidad S_k y las constantes de Lamé λ_k y μ_k . De esta forma, para cada realización $k = 1, \dots, M$, obtenemos problemas determinísticos para cada modelo.

Así, el modelo débilmente acoplado colocado en términos de p_k $k = 1, \dots, M$, es dado por:

Problema MCp: *Dados K_k y S_k , $k = 1, \dots, M$, encontrar los momentos de $p_k : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ para cada k , tal que*

$$S_k \frac{\partial p_k}{\partial t} - \operatorname{div}(K_k \nabla p_k) = 0, \quad (5.1)$$

con condiciones de contorno e inicial

$$\begin{aligned} p_k &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \nabla p_k \cdot \mathbf{n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \\ p_k &= p_D, \quad \text{en } \Omega, \quad \text{en } t = 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

De la misma forma, para cada realización $k = 1, \dots, M$, tenemos el problema determinístico del modelo totalmente acoplado en términos del par $\{\mathbf{u}_k, p_k\}$, de la forma:

Problema MCup: *Dados K_k , λ_k e μ_k , para cada $k = 1, \dots, M$, encontrar*

$\mathbf{u}_k : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ y $p_k : \Omega \times (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que satisfacen

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda_k \operatorname{div} \mathbf{u}_k) + \operatorname{div}[\mu_k(\nabla \mathbf{u}_k + \nabla \mathbf{u}_k^T)] - \nabla p_k &= 0, \\ \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} - \operatorname{div}(K_k \nabla p_k) &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

con condiciones de contorno e inicial

$$\begin{aligned} p_k &= 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_k \mathbf{n} = \mathbf{h}, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \mathbf{u}_k &= 0, \quad \mathbf{q}_k \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_k &= 0, \quad \text{en } \Omega, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Despues de la construcción del conjunto de soluciones $\{p_k\}$ y $\{\mathbf{u}_k, p_k\}$ $k = 1, \dots, M$ en cada formulación, los momentos estadísticos de las incógnitas son calculados numericamente usando (4.19)-(4.21).

5.2 Formulaci3n variacional

Para presentar la formulaci3n d3bil de las ecuaciones presentadas en la secci3n anterior introducimos la notaci3n usual. Sea $L^2(\Omega)$ el espacio de funciones escalares cuadrado integrables unido al producto interno y norma inducida:

$$(f, g) \equiv \int_{\Omega} f g d\Omega, \quad \|f\| = (f, f)^{1/2}, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega), \quad (5.5)$$

Sea $H^1(\Omega)$ el espacio de Hilbert

$$H^1(\Omega) \equiv \{f \in L^2(\Omega), \nabla f \in L^2(\Omega)\}. \quad (5.6)$$

con producto interno y norma inducida

$$(f, g)_1 \equiv (f, g) + (\nabla f, \nabla g) \quad \|f\|_1 = (f, f)_1^{1/2}, \quad \forall f, g \in H^1(\Omega). \quad (5.7)$$

Para la condici3n de frontera (5.2) y (5.4), tomadas en este trabajo, introducimos los espacios \mathbf{U} y \mathbf{V}

$$\mathbf{U} = \left\{ \mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^d, \quad \mathbf{w} = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2 \right\}, \text{ con } d = 1, 2, 3 \quad (5.8)$$

$$\mathbf{V} = \{v \in H^1(\Omega), \quad v = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1\}. \quad (5.9)$$

Multiplicando (5.1) por una funci3n $v \in \mathbf{V}$, integrando por partes y usando las condiciones de contorno obtenemos la formulaci3n variacional del problema d3bilmente acoplado (5.1) indexadas para cada realizaci3n:

Problema MCpV: *Dados K_k , S_k y p_D , para cada $t \in (0, T]$ y $k = 1, \dots, M$,*

encontrar $p_k(t) \in \mathbf{V}$, tal que

$$\left(S_k \frac{\partial p_k(t)}{\partial t}, v \right) + (K_k \nabla p_k(t), \nabla v) = 0, \quad \forall v \in \mathbf{V}, \quad (5.10)$$

$$(p_k(0), v) = (p_D, v), \quad \forall v \in L^2(\Omega),$$

De forma análoga, para obtener la formulación variacional del problema totalmente acoplado, multiplicamos (5.3) por $(\mathbf{w}, v) \in \mathbf{U} \times V$, integramos por partes y utilizamos las condiciones de contorno (5.4), obteniendo de esta forma los siguientes problemas

Problema MCupV: *Dados K_k, λ_k, μ_k y \mathbf{h} , para cada $t \in (0, T]$ y $k = 1, \dots, M$,*

hallar el par $\{\mathbf{u}_k(t), p_k(t)\} \in \mathbf{U} \times V$ tal que:

$$\begin{cases} (\lambda_k \operatorname{div} \mathbf{u}_k, \operatorname{div} \mathbf{w}) + (2\mu_k \mathcal{E}(\mathbf{u}_k), \mathcal{E}(\mathbf{w})) - (p_k, \operatorname{div} \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}, \\ \left(\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t}, v \right) + (K_k \nabla p_k, \nabla v) = 0, & \forall v \in V, \end{cases} \quad (5.11)$$

con

$$\mathbf{f}(\mathbf{w}) = \int_{\Gamma_1} \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma,$$

y los datos iniciales $\mathbf{u}_k(0)$ e $p_k(0)$ satisfacen el problema de punto de silla:

Hallar $\{\mathbf{u}_k(0), p_k(0)\} \in \mathbf{U} \times L^2(\Omega)$, tal que

$$\begin{cases} (2\mu_k \mathcal{E}(\mathbf{u}_k(0)), \mathcal{E}(\mathbf{w})) - (p_k(0), \operatorname{div} \mathbf{w}) = \mathbf{f}(\mathbf{w}), & \forall \mathbf{w} \in \mathbf{U}, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_k(0), v) = 0, & \forall v \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (5.12)$$

La Existencia y unicidad de la solución de la formulación débil de (5.10) - (5.12) fueron discutidas por Zenisek (1984).

5.3 Aproximación por elementos finitos

Consideramos ahora la discretización de los problemas variacionales por el método de Galerkin.

5.3.1 Formulaci3n semidiscreta

Consideramos Ω un dominio poligonal discretizado por una malla de N_e elementos, tales que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}^e \quad \text{com} \quad \bigcap_{e=1}^{N_e} \bar{\Omega}^e = \emptyset \quad (5.13)$$

donde Ω^e denota el interior de un elemento y $\bar{\Omega}^e$ su cerradura. El parámetro de malla es dado por $h = \max h_e$, $1 \leq e \leq N_e$, con $h_e = \text{diámetro de } \Omega^e$.

Sea $S_h^{l_0}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ espacio de funciones polinomiales de elementos finitos de clase \mathcal{C}^0 de grado l_0 . Definimos los subespacios de elementos finitos de V y U , como

$$V_h = S_h^{l_0} \cap V,$$

En el contexto del método de Monte Carlo, para cada realizaci3n k las aproximaciones de Galerkin de las formulaciones variacionales de los modelos poroelásticos (5.10) y (5.11), son dados por:

Problema MCp_h: Para $t \in (0, T]$ y $k = 1, 2, \dots, M$, encontrar $p_{kh}(t) \in V_h$,

tal que

$$\begin{aligned} S_{kh} \left(\frac{\partial p_{kh}(t)}{\partial t}, v_h \right) + (K_{kh} \nabla p_{kh}(t), \nabla v_h) &= 0, \\ (p_{kh}(0), v_h) &= (p_D, v_h), \end{aligned} \quad \forall v_h \in V_h.$$

Problema MCup_h: Para $t \in (0, T]$ y $k = 1, 2, \dots, M$, hallar el par

$\{\mathbf{u}_{kh}(t), p_{kh}(t)\} \in U_h \times V_h$ tal que:

$$\begin{aligned} (\lambda_{kh} \text{div} \mathbf{u}_{kh}, \text{div} \mathbf{w}_h) + (2\mu_{kh} \mathcal{E}(\mathbf{u}_{kh}), \mathcal{E}(\mathbf{w}_h)) \\ - (p_{kh}, \text{div} \mathbf{w}_h) &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in U_h, \\ (\text{div} \mathbf{u}_{kh}, v_h) + (K_{kh} \nabla p_{kh}, \nabla v_h) &= 0, \quad \forall v_h \in V_h, \end{aligned}$$

con $\mathbf{u}_h(0)$ e $\mathbf{u}_h(0)$ satisfaciendo

$$\begin{aligned} (2\mu_{kh}\mathcal{E}(\mathbf{u}_{kh}), \mathcal{E}(\mathbf{w}_h)) - (p_{kh}, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u}_h(0), \mathbf{v}_h\right) &= 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \end{aligned}$$

donde X_{kh} , denota la proyección de X_k ($X_k \in \{K_k, S_k, \lambda_k, \mu_k\}$) en el espacio $P_h^0(\Omega^e)$ de funciones constantes por partes sobre cada bloque geológico Ω^e con $(e = 1, \dots, N_e)$.

5.3.2 Formulación completamente discreta

Consideramos ahora las aproximaciones en el espacio y tiempo del problema (5.1). Sea Δt el intervalo de tiempo y sea \mathcal{P}^m la aproximación de $\mathcal{P}(\mathbf{t})$ en el instante $\mathbf{t}_m = m\Delta t$, ($m \geq 1$). El esquema de Euler implícito aproxima la derivada temporal de la forma

$$\frac{\partial \mathcal{P}^m}{\partial \mathbf{t}} \approx \frac{\mathcal{P}^m - \mathcal{P}^{m-1}}{\Delta t} \quad (5.14)$$

La formulación completamente discretas de los problemas determinísticos para cada realización en el contexto del método de Monte Carlo son dados por:

Problema MCp V_h^m : Para cada $t = t_m = m\Delta t$ ($m \geq 1$) y $k = 1, \dots, M$ hallar

$p_{kh}^m \in V_h$, tal que

$$\begin{aligned} (S_{kh}p_{kh}^m, \mathbf{v}_h) + \Delta t(K_{kh}\nabla p_{kh}^m, \nabla \mathbf{v}_h) &= (S_{kh}p_{kh}^{m-1}, \mathbf{v}_h), \\ (p_{kh}^0, \mathbf{v}_h) &= (p_D, \mathbf{v}_h), \end{aligned} \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h.$$

Problema MCup V_h^m : Para cada $t = t_m = m\Delta t$ ($m \geq 1$) y $k = 1, \dots, M$

encontrar al par $\{\mathbf{u}_{kh}^m, p_{kh}^m\} \in \mathbf{U}_h \times V_h$, tal que:

$$\begin{aligned} (\lambda_{kh}\operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}^m, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) + (2\mu_{kh}\mathcal{E}(\mathbf{u}_{kh}^m), \mathcal{E}(\mathbf{w}_h)) - (p_{kh}^m, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}^m, \mathbf{v}_h) + \Delta t(K_{kh}\nabla p_{kh}^m, \nabla \mathbf{v}_h) &= (\operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}^{m-1}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \end{aligned}$$

con \mathbf{u}_{kh}^0 y p_{kh}^0 satisfaciendo

$$\begin{aligned} (2\mu_{kh}\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{u}_{kh}^0), \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{w}_h)) - (p_{kh}^0, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) &= \mathbf{f}(\mathbf{w}_h), \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathbf{U}_h, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}_{kh}^0, v_h) &= 0, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Después del cálculo de los campos potenciales $\{\mathcal{U}_h^n, \mathcal{P}_h^n\}$, la velocidad y las tensiones efectivas pueden ser calculadas por un esquema de post procesamiento, considerando las formas discretas de la ley de Darcy y de la ley de Hooke.

Capítulo 6

Simulaciones Numéricas

En este capítulo presentamos las simulaciones numéricas del modelo discreto, tratado en un problema de extracción primaria de aceite en reservorios de petróleo, donde la producción del insumo, se debe, exclusivamente a la diferencia de presión entre el pozo recién abierto y el fluido inicialmente confinado y sometido a alta presión debido al peso de las camadas geológicas superiores este tipo de extracción dura en media aproximadamente 2 meses.

Primero verificamos la calidad de los campos (realizaciones) generados por el método de descomposición LU, para utilizarlos en las simulaciones de Monte Carlo. En seguida, ilustramos numericamente los resultados obtenidos.

La geometría del reservorio es ilustrada en la Figura 6.1. Denotando por $\{x, y\}$ las coordenadas rectangulares bidimensionales, el problema consiste en un reservorio productivo, delimitado por una pared rígida impermeable en la base ($y = 0$), sujeto a una carga debido al peso de las formaciones geológicas situadas encima de él ($y = H$). En la frontera superior que tiene carga, es introducido un pozo horizontal que conecta la poro presión con la presión atmosférica (p_0). Las fronteras laterales son consideradas impermeables sin tensiones de cisallamiento.

Denotando las componentes cartesianas del desplazamiento y de los esfuerzos efectivos como $\mathbf{u} = (u, v)$ y $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}$, denotando h_y la densidad de la carga

en la dirección y , las condiciones de contorno son dadas por

$$\begin{aligned} \sigma_y = h_y, \quad p = 0, \quad \text{en} \quad 0 \leq x \leq L \quad y = H, \\ u = 0, \quad K \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \text{en} \quad x = 0, x = L, \quad 0 \leq y \leq H, \\ u = v = 0, \quad K \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \text{en} \quad y = 0 \quad 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (6.1)$$

y la condición inicial

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{en} \quad [0, L] \times [0, H], \quad t = 0. \quad (6.2)$$

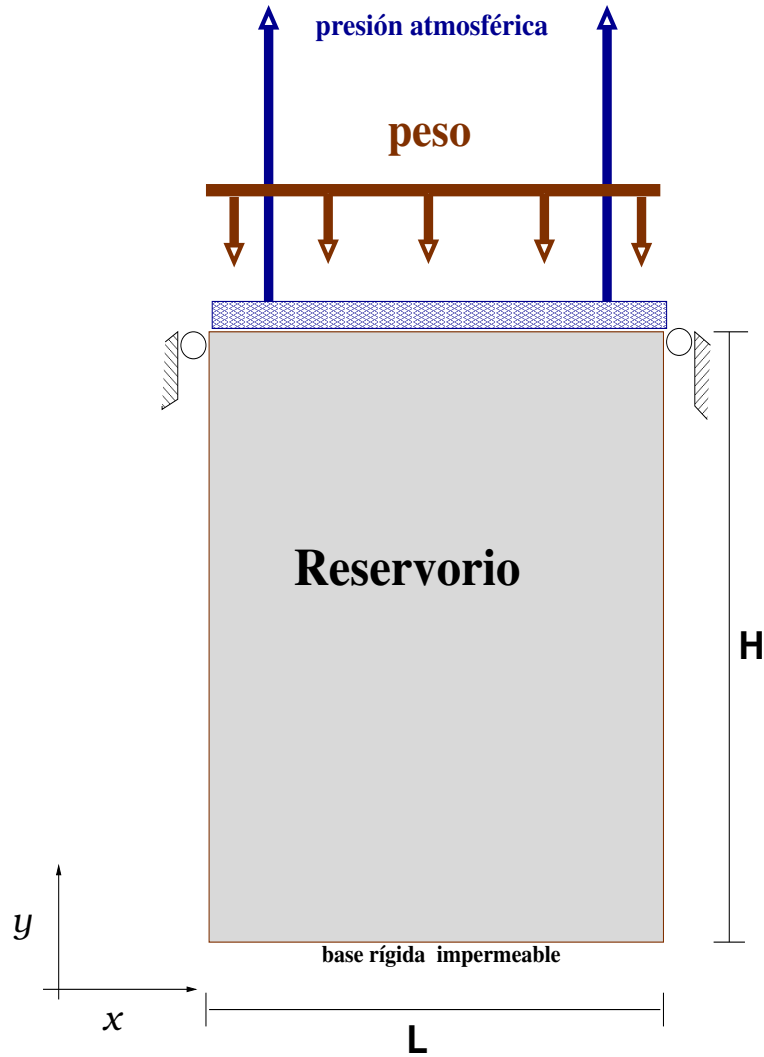


Figure 6.1: Ejemplo utilizado para validar la teoría bidimensional

Los valores adpotados para las propiedades del reservorio son presentados en la siguiente Tabla

Media Geométrica del módulo de Young	$E_G=17600$ MPa
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.1$
Media Geométrica de la compresibilidad	$S_G = 5.13 \times 10^{-5}/\text{MPa}$
Media Geométrica de la conductividad hidráulica	$K_G = 0.0484m^2/ \text{MPa días}$
Faja de variación de la heterogeneidad	$\sigma^2 \in [0.04, 4]$
Faja de longitud de la correlación	$\lambda_Y \in [1, 15m]$
Carga aplicada	$h_y = 50\text{Mpa}$
Dimensiones del dominio utilizado	$L \times H=30m \times 90m$

6.1 Generación de los campos aleatorios

Como mencionamos anteriormente, en este trabajo utilizamos el método de decomposición LU para la generación de los campos aleatorios correspondientes a los parámetros envueltos en el modelaje estocástico. En este sentido, admitimos la estacionariedad de segundo orden de los campos de tal forma que la matriz de covarianzas dependa solamente de la distancia entre los puntos donde la variable aleatoria es definida. Siendo así, subdividimos el dominio geológico en N_b bloques, que denotaremos como Ω_b y respectivos centros \mathbf{x}_b , con $b = 1, 2, \dots, N_b$, resaltamos que los campos aleatorios así generados son constantes en cada elemento Ω_b de la malla geológica. De esta forma, la matriz de covarianzas de orden $N_b \times N_b$ es construida en relación a la distancia entre los centros de los bloques y sigue una ley de decaimiento exponencial.

El parámetro envuelto en la tasa de decaimiento en la función de covarianza exponencial, está asociado a la “longitud de correlación”, que representa físicamente la distancia sobre el cual las correlaciones prevalecen. De esta forma, un reservorio

que presenta baja variabilidad en sus propiedades mecánicas corresponde a la longitud de correlación alta y en general son representados por una función de covarianza exponencial. En la Figura 6.2 presentamos una realización de un campo aleatorio de la conductividad hidráulica gobernado por una ley de covarianza exponencial en la cual observamos regiones bien definidas de valores del campo gaussiano.

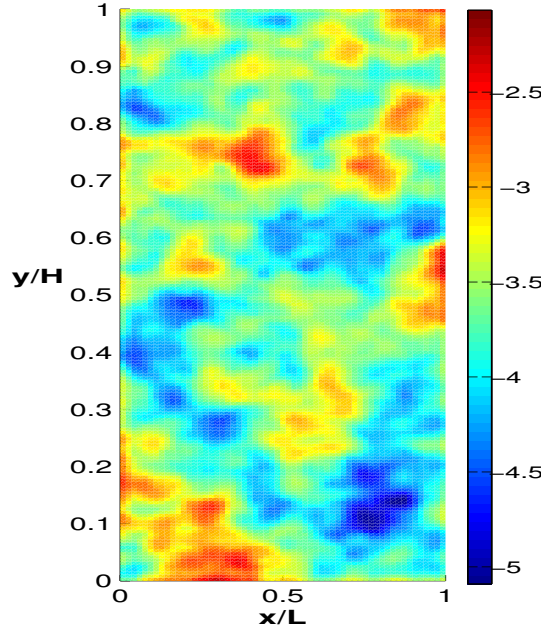


Figure 6.2: Una realización del campo Gaussiano $Y = \ln K$ con $m_Y = -3.028$, exponencial $\sigma_Y = 1$ y $\lambda_Y = 10$

6.2 Efecto de la variabilidad de K y E

Las figuras siguientes ilustran el efecto de la variabilidad de la conductividad hidráulica $Y = \ln K$ y del módulo de Young $T = \ln E$ sobre los campos de presión, velocidad de Darcy, desplazamiento y esfuerzo efectivo. Las simulaciones presentadas son el resultado de considerar realizaciones con covarianza exponencial. Los campos Y y T tienen varianza $\sigma_Y^2 = \sigma_T^2 = 1$ y longitud de correlación $\lambda_T = \lambda_Y = L/5$.

La Figura 6.3 muestra los campos de la presión y de la segunda componente de la velocidad de Darcy en el inicio del proceso de producción para $t = 2$ días.

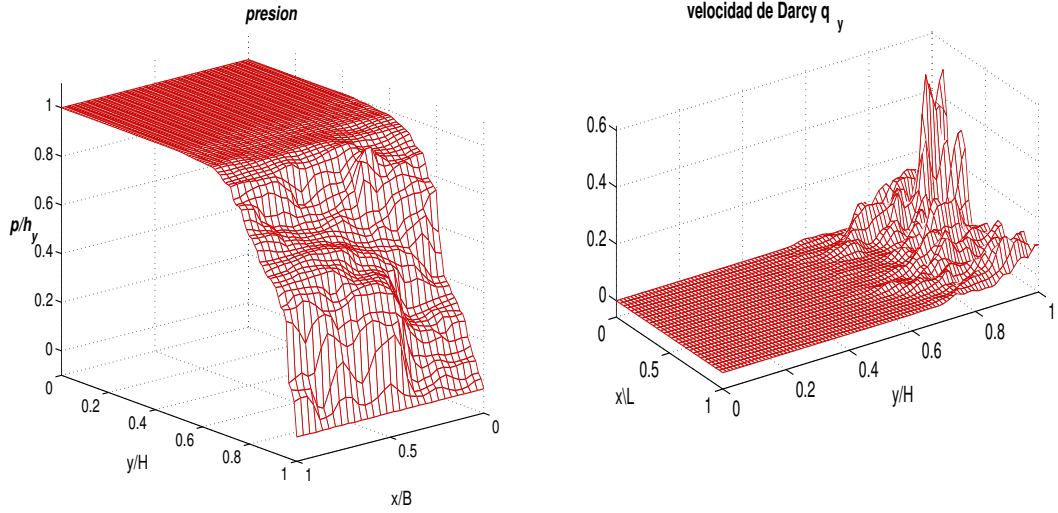


Figure 6.3: Campos de la presión (normalizada por la carga vertical) y de la segunda componente de la velocidad para $t=2$ días

Podemos observar que, en los instantes iniciales los campos presentan una región de fuerte perturbación junto al pozo (capa limite), donde la condición de contorno de Dirichlet es impuesta y comienza el movimiento del fluido. Podemos observar también que la heterogeneidad del medio poroso da origen a la formación de caminos preferenciales para el flujo, haciendo que la velocidad presente valores acentuados en ciertas regiones del dominio. La presencia de estos caminos preferenciales tiene influencia significativa en las tasas de producción del insumo, anticipando la llegada del fluido al pozo de producción en relación al caso homogéneo.

La Figura 6.4 muestra los campos, de presión y de la segunda componente de la velocidad de Darcy cuando $t = 36$ días. Podemos notar el avance de los caminos preferenciales y una gradual disipación del campo de presión, típico del proceso de consolidación.

Las Figuras 6.5 y 6.6 muestran los campos de las componentes vertical del desplazamiento \mathbf{u}_y y normal del esfuerzo efectivo σ_y , en el inicio de la producción $t = 2$ días y para el tiempo $t = 36$ respectivamente. Tal como podemos observar el desplazamiento vertical del sólido es mucho más acentuado en la vecindad del pozo, donde muestra una fuerte perturbación (capa límite) y se anula próximo a

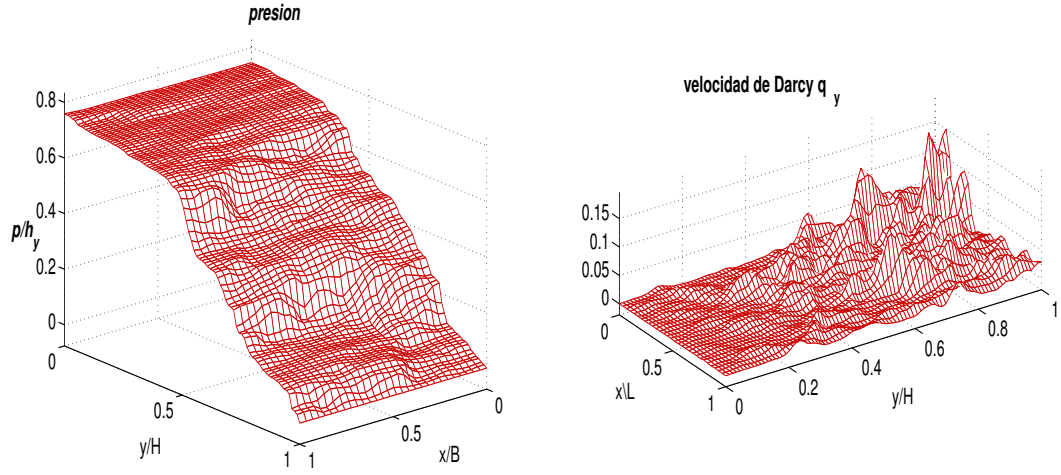


Figure 6.4: Campos de la presión (normalizada por la carga vertical) y de la segunda componente de la velocidad para $t=36$ días

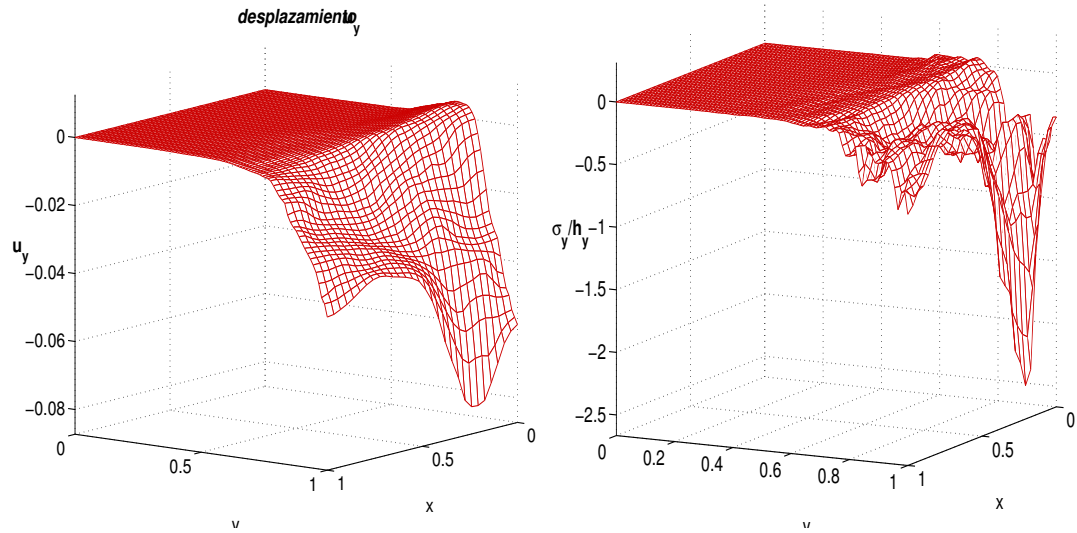


Figure 6.5: Campos del desplazamiento vertical y de la tensión normal para $t = 2$ días

la base rígida [Figura 6.5]. El esfuerzo efectivo normal exhibe comportamiento semejante con fuertes gradientes junto al pozo. A medida que el tiempo pasa, ocurre un proceso de regularización en el campo de desplazamiento y el incremento del esfuerzo efectivo es propagado a lo largo del dominio [Figura 6.6].

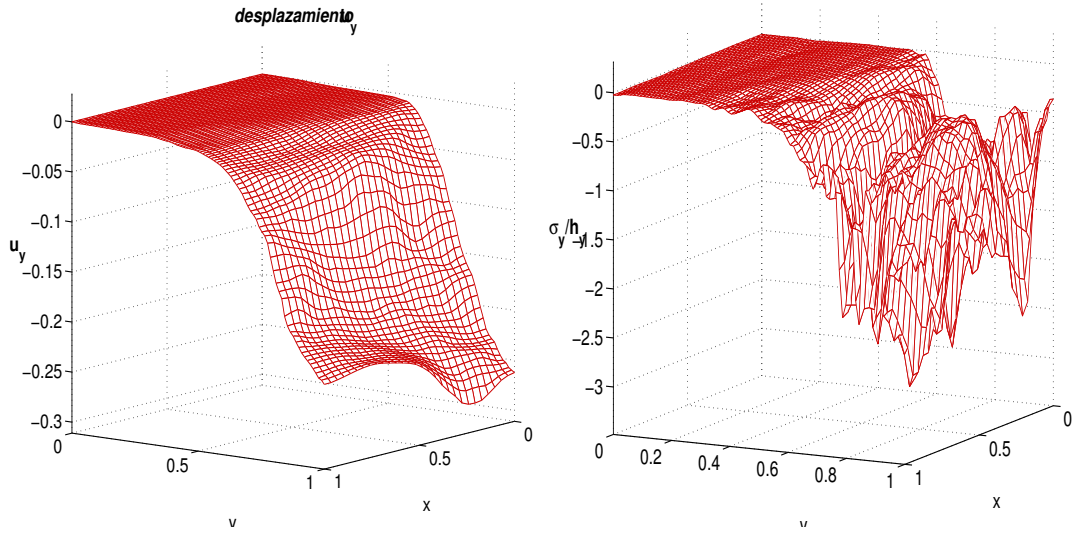


Figure 6.6: Campos del desplazamiento vertical y de la tensión normal para $t = 36$ días

6.3 Estudio numérico de la convergencia estadística

Para ilustrar numéricamente la convergencia estadística del método de Monte Carlo graficamos la evolución del error relativo de la media y varianza de la presión como función del número de realizaciones. Para una tolerancia prescrita ϵ el criterio de convergencia es dado por: $|Er(m_p^{M+1}) - Er(m_p^M)| < \epsilon$, donde el error relativo es dado por

$$Er(m_p^M) := \frac{||m_p^M - m_p^{M-1}||}{||m_p^M||}, \quad (6.3)$$

con $||\cdot||$ designando la norma del máximo.

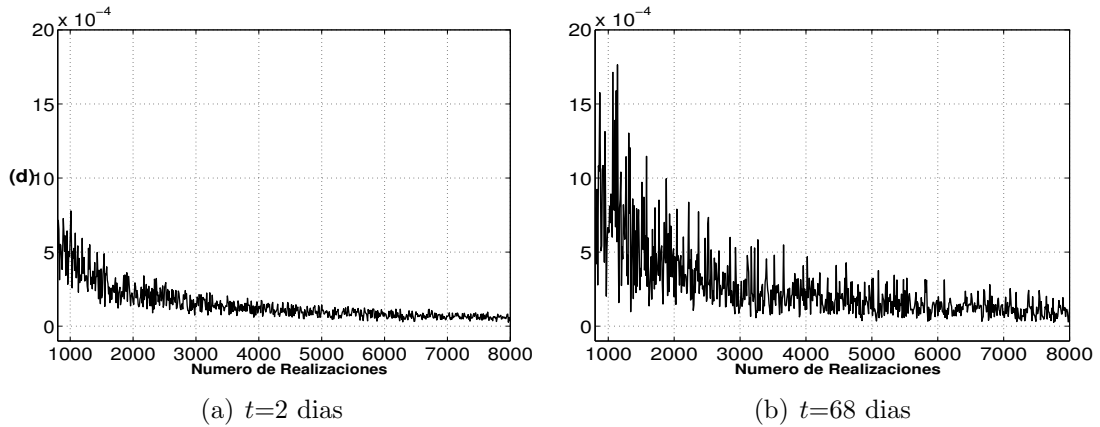


Figure 6.7: Convergencia estadística del primer momento de la presión

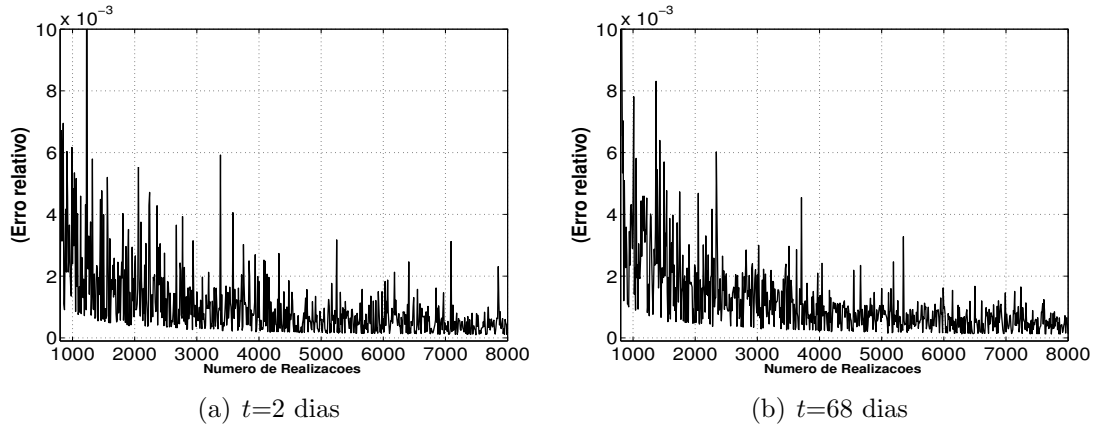


Figure 6.8: Convergencia estadística del segundo momento de la presión.

Las Figuras 6.7 - 6.8, ilustran la convergencia estadística del primer y segundo momento de la presión en el punto $(x, y) = (L/2, H/2)$ para dos tiempos. Tal como lo esperado, después de un cierto número de realizaciones (8000), el error relativo de los momentos converge para cero. Podemos observar que cuando el tiempo es mayor es necesario un mayor número de realizaciones para alcanzar la convergencia estadística. Tal evidencia se debe al hecho que la solución para la realización $k = 1, \dots, M$ en el tiempo t_n hereda la aproximación de los tiempos anteriores via esquema de Euler regresivo. Notamos también que el segundo momento de la presión demanda mayor número de realizaciones para conseguir convergencia estadística.

6.4 Comparación entre los dos modelos de poroelasticidad

A continuación en los siguientes gráficos mostramos a través de comparaciones del primer momento (media) de las variables poroelásticas (presión, desplazamiento, velocidad y tensión) las diferencias entre los modelos totalmente y débilmente acoplados que aparecen cuando consideramos variabilidad en los parámetros (conductividad hidráulica y módulo de Young). Para obtener el primer momento de estas variables se realizaron 10 000 realizaciones asegurando de esta forma la convergencia estadística.

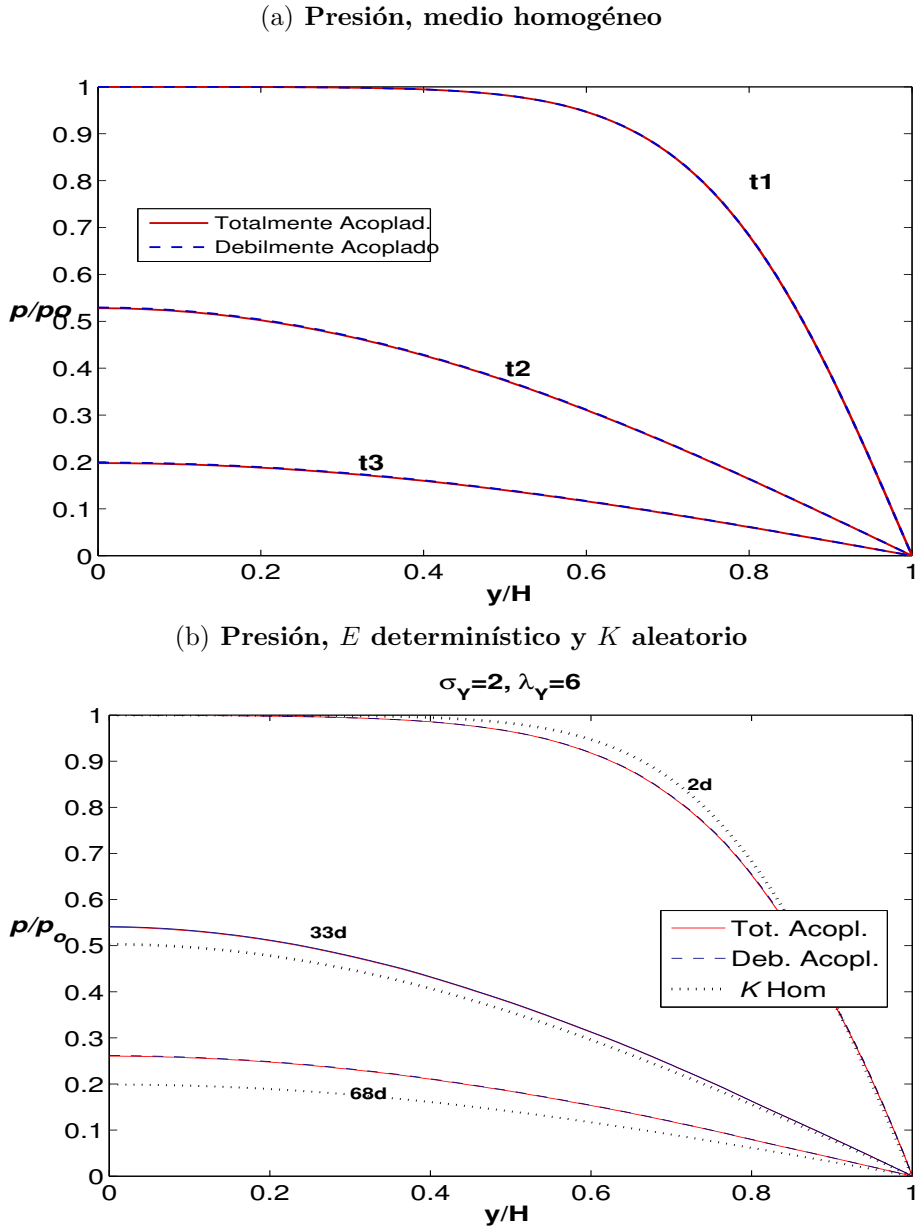


Figure 6.9: Comparación de los perfiles de la media de la presión (normalizada) obtenidos por los dos modelos para tres tiempos

Las Figuras 6.9 y 6.10 muestran la evolución de los perfiles del primer momento (media) de la presión para varios grados de heterogeneidad obtenidos por las dos formulaciones. Tal como se esperaba los perfiles coinciden cuando el medio es homogéneo [Figura 6.9(a)]. Cuando consideramos la conductividad hidráulica K aleatoria, las soluciones de ambos modelos aún se muestran próximos [Figura 6.9(b)], esto debido a que el modelo débilmente acoplado influye en el recorrido del fluido así como el modelo totalmente acoplado. Sin embargo, cuando incorporamos

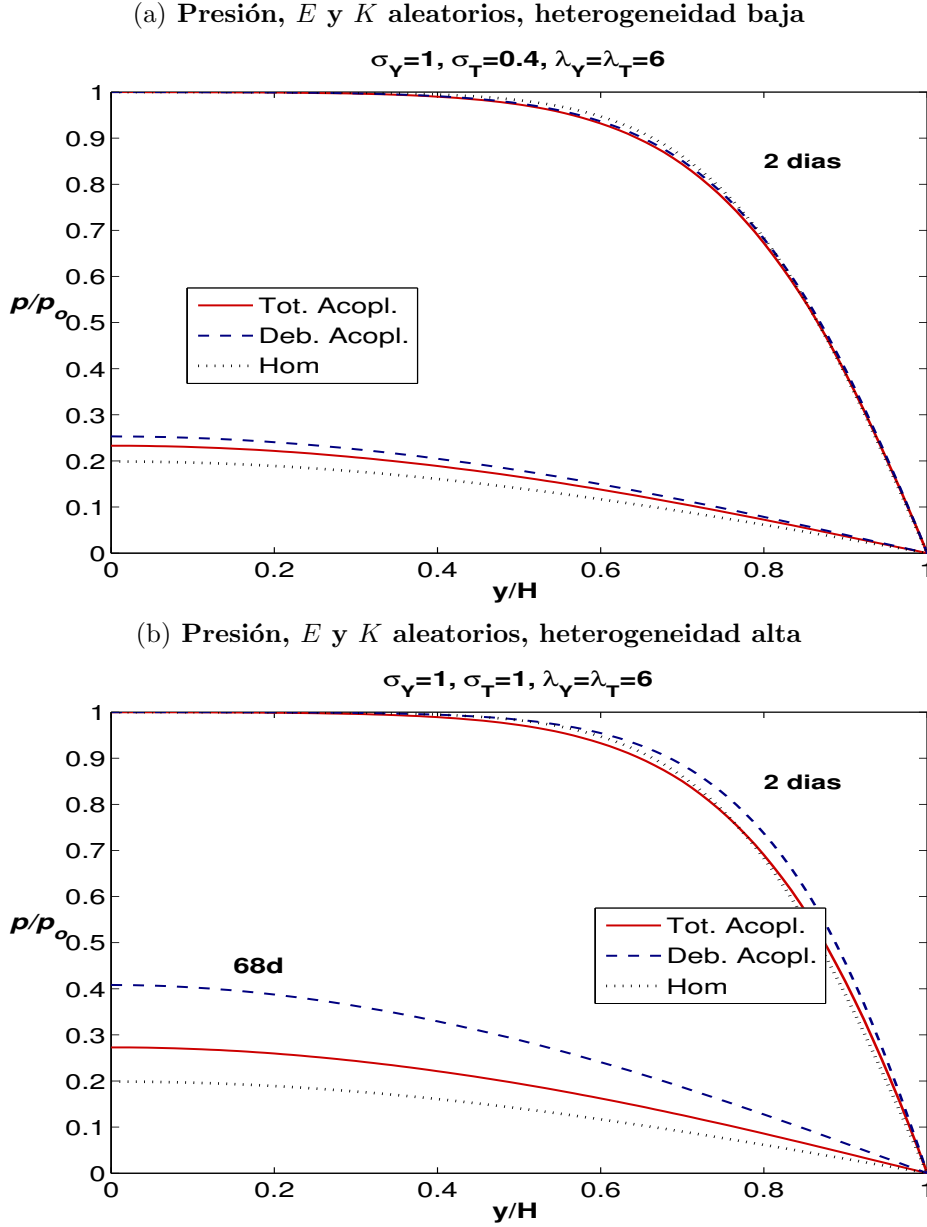
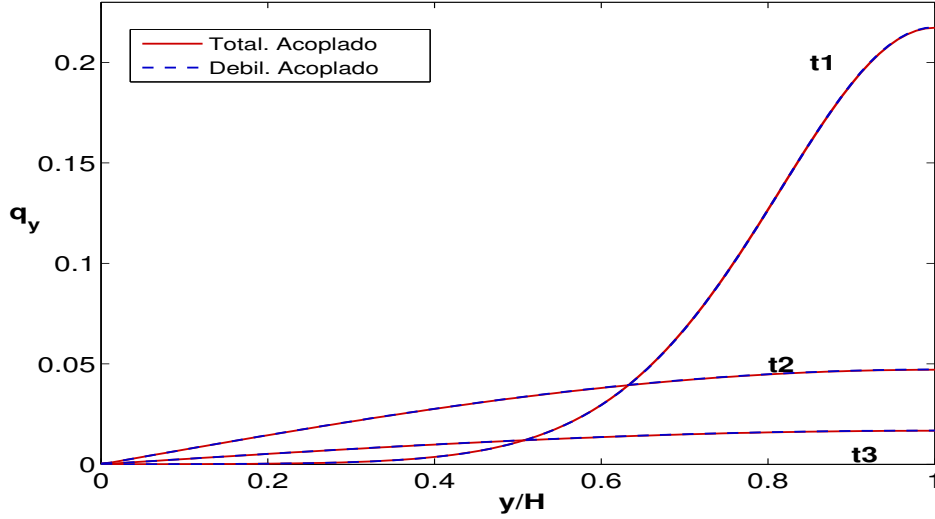


Figure 6.10: Comparación entre los perfiles de la media de la presión (normalizada) obtenidos por los dos modelos para dos tiempos

también variabilidad al módulo de elasticidad E , los modelos débilmente y totalmente acoplados no dan resultados próximos, aumentando la diferencia entre ellos cuando la variabilidad de E aumenta. En la Figura 6.10 mostramos los perfiles de la presión para algunos valores de la varianza de E . A pesar de que la compresibilidad del modelo débilmente acoplado fue tratada como parámetro aleatorio (parámetro obtenido a partir de E), tal hecho encubre las informaciones provenientes de los efectos de la componente desviadora sobre la porosidad produciendo

resultados nada próximos. Podemos observar que, debido a que no incluimos la tensión desviadora, el modelo débilmente acoplado tiende a retardar el proceso de compactación.

(a) Velocidad de Darcy, medio homogéneo



(b) Velocidad de Darcy, E determinístico y K aleatorio

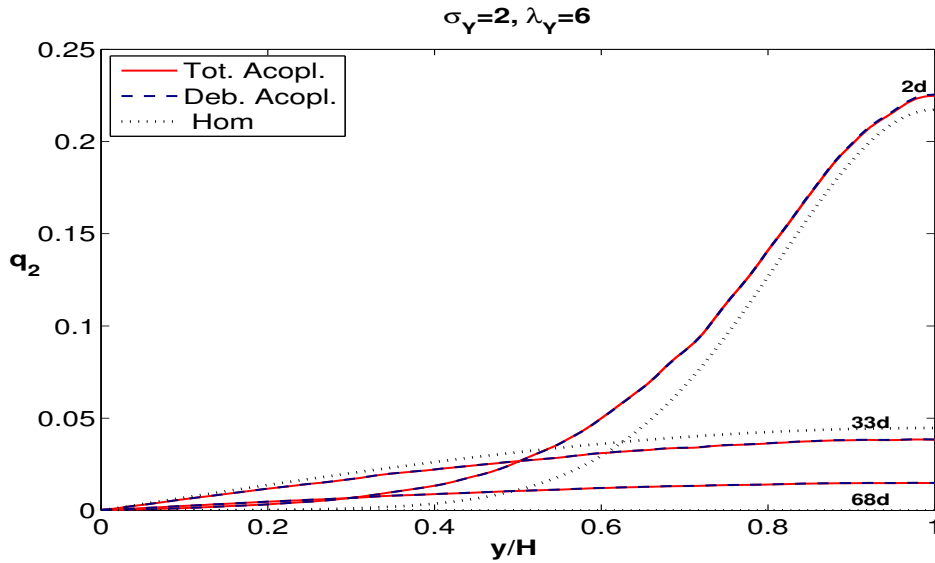
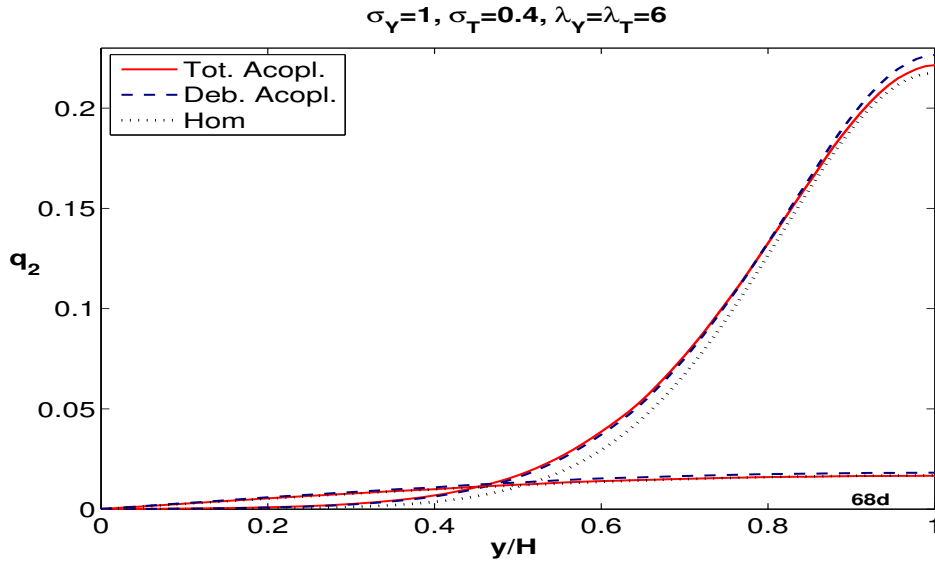


Figure 6.11: Comparación entre los perfiles de la velocidad de Darcy en la dirección "y" obtenidos por los dos modelos para tres tiempos

Las Figuras 6.11 y 6.12 muestran la comparación entre ambos modelos, para los perfiles de la media de la velocidad en la dirección y . Al igual que en la presión observamos también la proximidad entre los modelos cuando el medio es homogéneo [Figura 6.11(a)] y esta proximidad se mantiene cuando solamente K es considerado

(a) Velocidad de Darcy, E y K aleatorios, heterogeneidad baja



(b) Velocidad de Darcy, E y K aleatorios, heterogeneidad alta

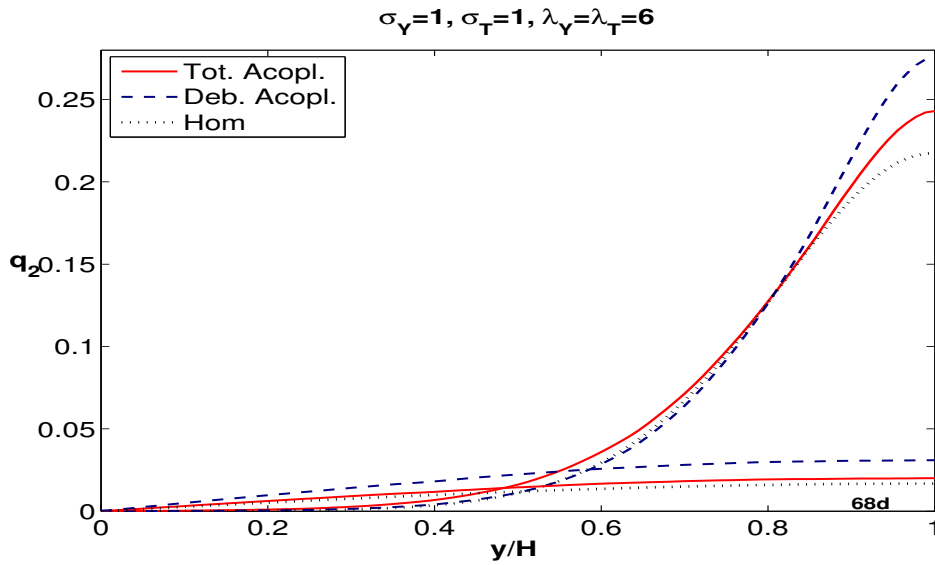


Figure 6.12: Comparación entre los perfiles de la velocidad de Darcy en la dirección vertical obtenidos por los dos modelos para dos tiempos

aleatorio [Figura 6.11(b)]. Nuevamente, cuando consideramos aleatoriedad en los parámetros elásticos, los resultados obtenidos por ambos modelos divergen entre si, distanciándose cada vez más cuando la variabilidad de los parámetros elásticos aumenta [Figura 6.12]. Se observa que el modelo débilmente acoplado superestima la velocidad del fluido debido a que retarda la compactación.

Las Figuras 6.13 y 6.14 muestran la comparación entre los perfiles de la media del desplazamiento vertical obtenidos por las dos formulaciones. Nuevamente para

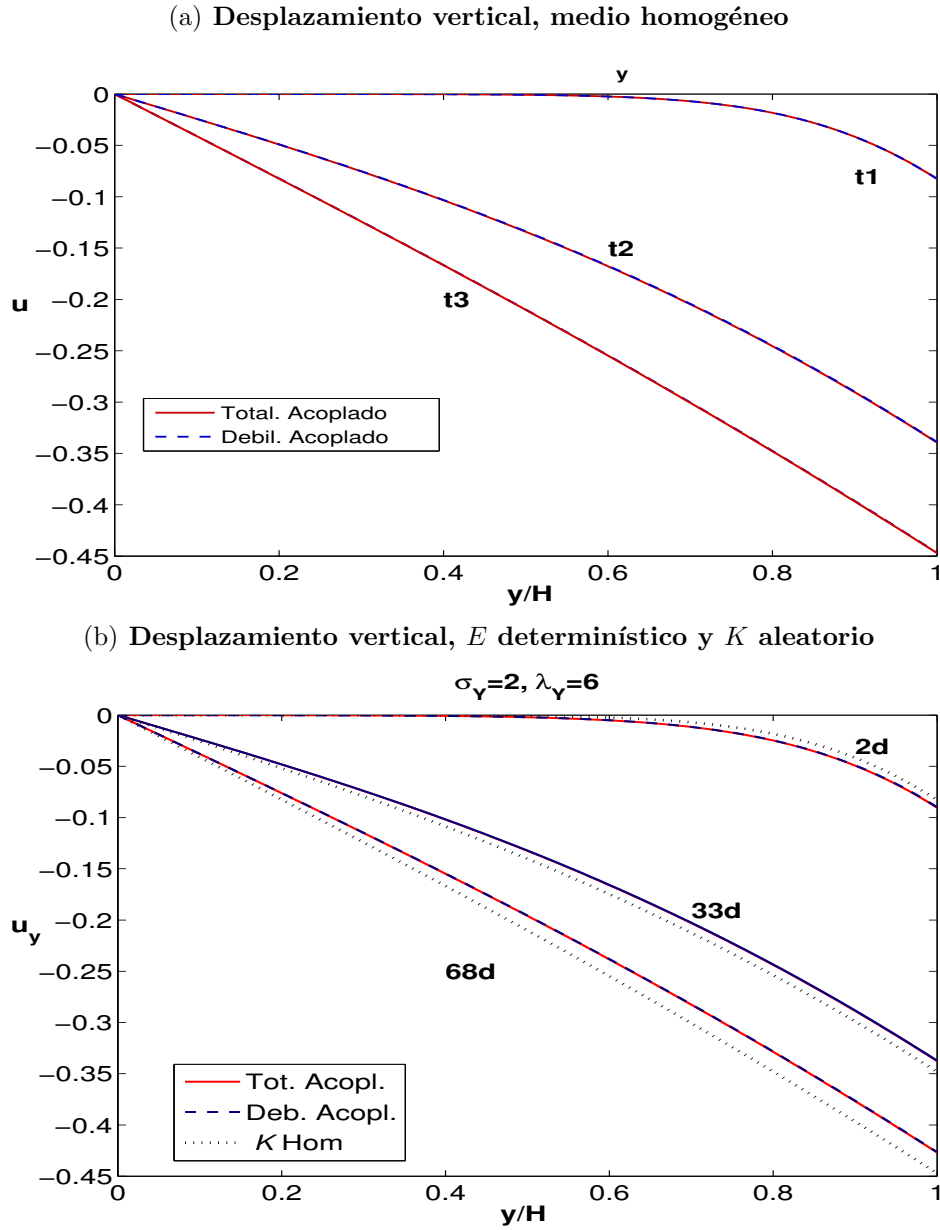
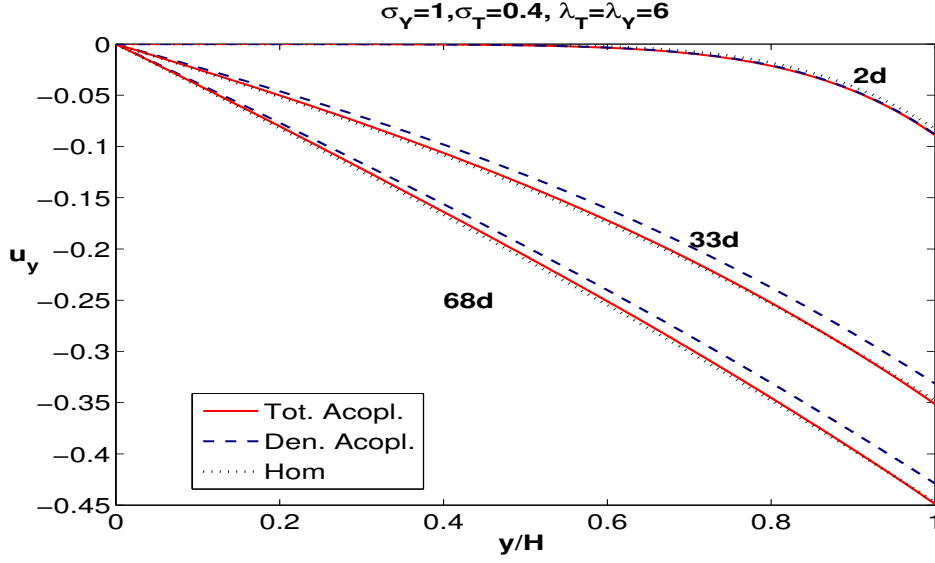


Figure 6.13: Comparación entre los perfiles de la media del desplazamiento vertical del sólido obtenidos por ambos modelos para tres tiempos

medios homogéneos [Figura 6.13(a)] los perfiles se encuentran próximos, cuando K es considerado aleatorio [Figuras 6.13(b)] los perfiles siguen manteniendo esa proximidad sin exhibir disparidad significativa entre ellos de forma que pueda comprometer la confiabilidad de las simulaciones numéricas. Para medios heterogéneos con K y E aleatorios, notamos que, debido a la incorporación de las tensiones de cizallamiento sobre la compactación de la matriz porosa la media del desplazamiento obtenido por el modelo totalmente acoplado está siempre al frente

del perfil obtenido por el modelo débilmente acoplado [Figura 6.14].

(a) Desplazamiento vertical E y K aleatorios, heterogeneidad baja



(b) Desplazamiento vertical E y K aleatorios, heterogeneidad alta

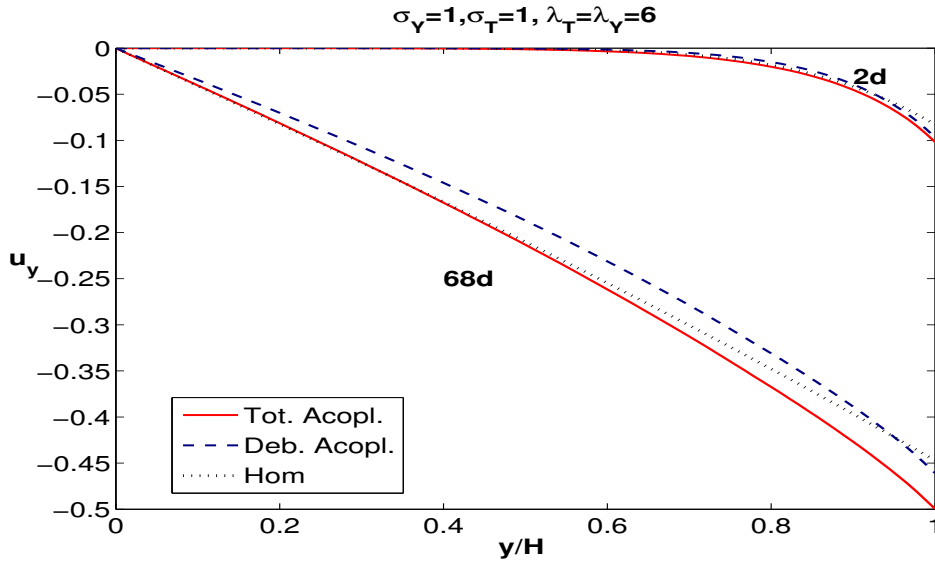


Figure 6.14: Comparación entre los perfiles de las medias del desplazamiento vertical del sólido entre los dos modelos para dos tiempos

Las Figuras 6.15 y 6.16 muestran la comparación entre los perfiles de la componente normal de la media de la tensión efectiva $\langle \sigma_T \rangle$ obtenidos por los modelos de poroelasticidad para dos niveles diferentes de heterogeneidad. De la misma forma que en los casos anteriores, cuando el medio es homogéneo o cuando solamente la conductividad hidráulica es considerada aleatoria, no se observa diferencia entre los perfiles de la tensión efectiva. Cuando K y E son considerados aleato-

rios, hay una notable diferencia, pues al despreciar los efectos distorsionales de la matriz sobre la porosidad en el modelo débilmente acoplado obtenemos un atraso en la evolución de la tensión cuando comparamos con el modelo completamente acoplado.

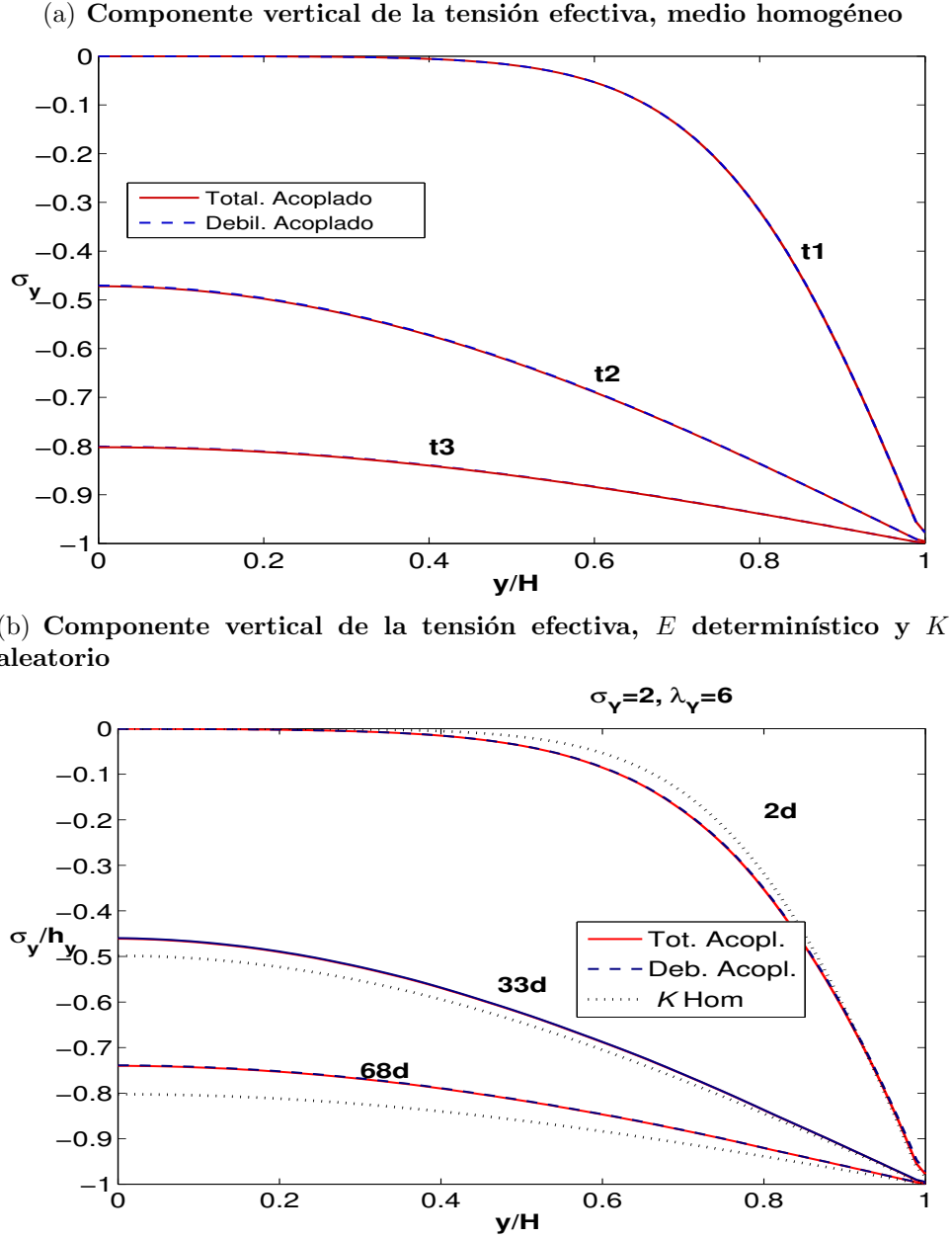


Figure 6.15: Comparación entre los perfiles de la media de la tensión efectiva vertical obtenidos por ambos modelos para tres tiempos, a) medio homogéneo b) medio heterogéneo

Finalmente, mostramos la comparación entre los perfiles del caudal de petróleo en el pozo de producción. En el inicio del proceso, el caudal es afectado por la

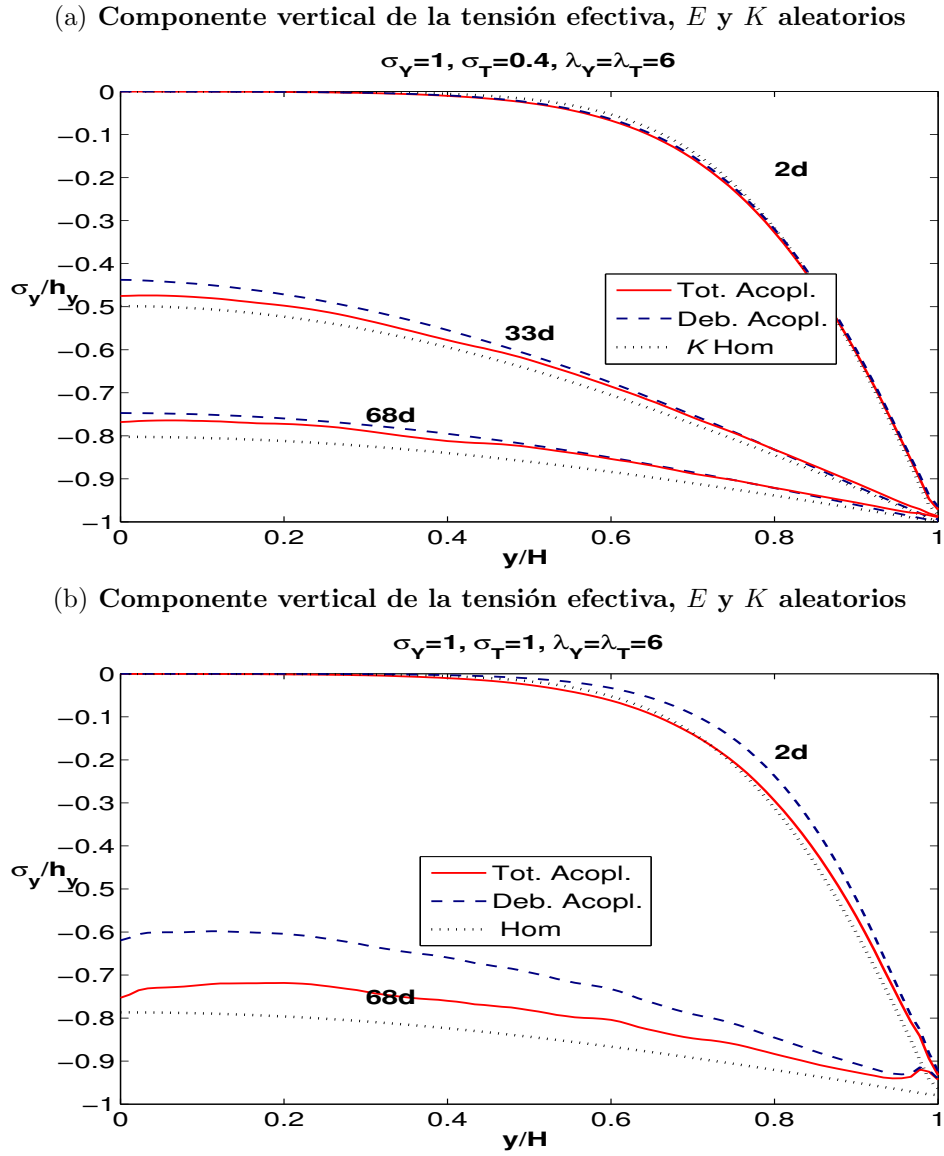


Figure 6.16: Comparación entre los perfiles de la media de la tensión efectiva vertical del sólido obtenidos por los dos modelos para dos tiempos

capa límite de la velocidad junto al pozo ocurriendo un pico de producción [Figura 6.17] seguido de una caída rápida y a medida que el tiempo transcurre la producción primaria tiende para cero.

Podemos observar que en medios homogéneos no hay diferencia entre las curvas de producción. La diferencia entre las curvas de producción aparece cuando el módulo de Young es aleatorio [Figura 6.17]. Notamos que a medida que la varianza de este parámetro aumenta el atraso del modelo débilmente acoplado que no incorpora los efectos desviadores retardan la captura de la compactación

generando curvas de producción que sobre estima el caudal del petróleo.

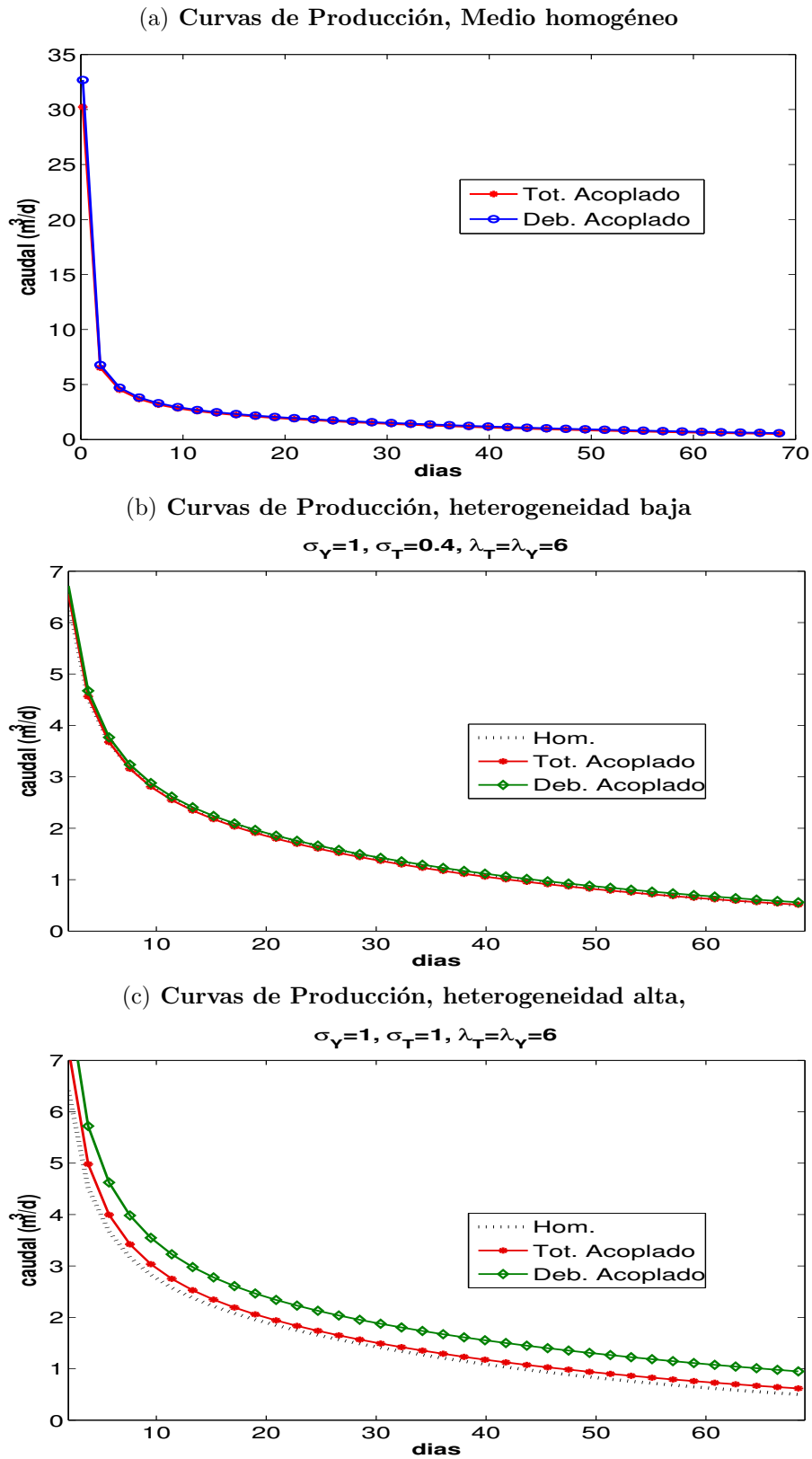


Figure 6.17: Comparación entre las curvas medias de producción obtenidas por los modelos débilmente y totalmente acoplados

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo consideramos formaciones geológicas heterogéneas, y realizamos el modelaje estocástico del problema de poroelasticidad (describe el movimiento del fluido a través de un medio poroso y las deformaciones de la matriz porosa) considerando variabilidad e incertidumbre en los parámetros de entrada tales como la conductividad hidráulica y el módulo de Young. Consideramos dos modelos poroelásticos, el totalmente acoplado (que considera ambos parametros) y el débilmente acoplado (sólo considera la conductividad hidráulica) , y estudiamos su desempeño así como la proximidad de sus soluciones.

Particularmente consideramos un problema proveniente de la explotación primaria de petróleo, donde la carga impuesta en la frontera superior está uniformemente distribuida y donde estos dos modelos dan resultados muy próximos cuando el medio poroso es considerado homogéneo. Los resultados fueron ilustrados con simulaciones numéricas usando métodos de elementos finitos juntamente con el algoritmo de Monte Carlo.

Observamos que, cuando solamente consideramos a la conductividad hidráulica como parámetro aleatorio con cualquier grado de variabilidad, las soluciones de ambos modelos siguen siendo próximas. Sin embargo, cuando incorporamos variabilidad en el módulo de Young los resultados de ambos modelos comienzan a diferir y a medida que la variabilidad del módulo de Young aumenta, la precisión del modelo débilmente acoplado se deteriora.

En consecuencia, en el caso de formaciones geológicas heterogéneas con alta variabilidad de las constantes elásticas (módulo de Young), el modelo débilmente acoplado presenta resultados pobres en los problemas de poroelasticidad y a pesar de ser costoso se hace necesario el uso del modelo totalmente acoplado para resolver dicho problema.

Referencias Bibliográficas

G. B. Beacher y T. S. Ingra. Stochastic fem in settlement predictions. **Journal Geotechnical Engrg, ASCE**, 107:449–463, 1981.

J. Bear. **Hydraulics of groundwater**. MCGRAW-HILL, 1979.

M. Beran. **Statical Continuum Theories**. New york, Interscience Publishers, 1969.

M. Biot. General theory of three-dimensional consolidation. **J. Appl.Phys.**, 12: 155–164, 1941.

M. Biot y D.G Willis. The elastic coefficients of the theory of consolidation. **J. Appl. Mech.**, 79:594–601, 1957.

W. Chen y D.J. Han. **Plasticity for Structural Engineers**. New York, Springer-Verlag, 1988.

G. Christakos. **Random Field Models in Earth Sciences**. New York Dover Publications, 2005.

O. Coussy. **Poromechanics**. France, John Wiley & Sons, Ltd, 1st edição, 2004.

G. Dagan. **Flow and transport in porous formations**. Berlin, Springer-Verlag., 1989.

G. Dagan. An overview of stochastic modeling groundwater flow and transport: From theory to applications. **EOS, Transactions American Geophysical Union**, 83(53):621, 2002.

- R.H. Dean, X. Gai, C.M. Stone, y S.E. Minkoff. A comparison of techniques for coupling porous flow and geomechanics. **SPE**, 1:132–140, 2006.
- E. Fjaer, R.M. Holt, P. Horsrud, A. M. Raaen, y R. Risnes. **Petroleum Related Rock Mechanics**. New York, ELSEVIER, 1992.
- R. A. Freeze. A stochastic conceptual analysis of one dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media. **Water Resouces Research**, 11(5): 725–741, 1975.
- G.D. Frias, M. Murad, y F. Pereira. Stochastic computational modeling of highly heterogeneous poroelastic media with long-range correlations. **J. Numer. Anal. Methods Geomech**, 2004.
- Y. C. Fung. **Biomechanics: motion, flow, stress and growth**. New York Springer-Verlag, 1990.
- L.W. Gelhar. **Stochastic subsurface hydrology**. New Jersey, Prentice Hall., 1993.
- R.G. Ghanem y P. D. Spanos. **Stochastic Finite Elements a Spectral Approach**. New York, Springer-Verlag, 1991.
- M. S. Gutierrez y R. W. Lewis. Coupling of fluid flow and deformation in underground formations. **J. Engrg. Mech.**, 128(7):779–787, 2002.
- Th. Harter. **Unconditional and Conditional Simulation of Flow and Transport in Heterogeneous, Variably Saturated Porous Media**. Tese de Doutorado, University of Arizona, 1994.
- R. W. Lewis y B. A. Schrefler. **The finite element method in the Deformation and Consolidation of Porous Media**. New York, John Wiley & Sons., 1987.
- R. W. Lewis, B. A. Schrefler, y L. Simoni. Coupling versus uncoupling in soil consolidation. **International Journal for Numerica and Aplication Methods in Geomechanics**, 15:533–548, 1991.

- P. Longuemare, M. Mainguy, P. Lemonnier, A. Onaisi, C. Gerard, y N. Koutsabeloulis. Geomechanics in reservoir simulation: Overview of coupling methods and field case study. **Oil and Gas Science and Technology**, 57:471–483, 2002.
- P. Lumb. The variability of natural soils. **Canadian**, 27:859–874, 1966.
- M. Mainguy y P. Longuemare. Coupling fluid flow and rock mechanics: Formulations of the partial coupling between reservoir and geomechanical simulators. **Oil & Gas Science and Technology**, 57(4):355–367, 2002.
- A. Mantoglou y J. L. Wilson. The turnig bands methods for simulations of random fields using lines generations by spectral method. **Water Resouces Research**, 18:1379–1388, 1982.
- G. M. Paice, D. V. Griffiths, y G.A. Fenton. Finite element modeling of settlements on spatially random soil. **Water Resouces Research**, 122(9):777–779, 1996.
- A Papoulis. **Probability, Random Variables and Stochastic Processes**. McGraw-Hill Kogakusha, 1965.
- E. Parzen. **Stochastic Processes**. San francisco Holden day, 1962.
- Y. Rubin. **Applied Stochastic Hydrogeolo**. New York, Oxford university press, 2003.
- A. Settari y F.M. Mourits. A coupled reservoir and geomechanical simulation system. **SPE Journal**, páginas 219–226, 1998.
- R. L. Shiffman, A. T. Chen, y Jane C. Jordan. An analysis of consolidation theories. **Journal of the soil mechanics and foundations division**, 1:285–312, 1969.
- K. Terzaghi y Peck R. **Mecánica dos Solos**. Ao Livro Técnico S. A., 1962.
- A. Verruijt. **OFFSHORE SOIL MECHANICS**. Delft University of Technology, 2006.

- H. Wang. **Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology**. New York, Princeton series in geophysics, 2000.
- Dongbin Xiu y George Em Karniadakis. The wiener-askey polynomial chaos for stochastic differential equations. **SIAM J. Sci. Comput.**, 24(2):619–644, 2002.
- D.G Zeitoun y R. Baker. A stochastic approach for settlement predictions of shallow foundations. **Geotechnique**, 42(4):617–629, 1992.
- A . Zenisek. The existence and uniqueness theorem in biot consolidation theory. **Applications of Mathematics**, 29:194–211, 1984.
- D. Zhang. **Stochastic Methods for Flow in Porous Media**. Los Alamos, Academic Press, 2002.